PREMIÈRES S
DEVOIR COMMUN DE MATHÉMATIQUES
JEUDI 30 MAI 2013

Durée : 2 heures - Calculatrice autorisée
Le barème est donné à titre indicatif. Le total est sur 25.

Le sujet comporte 4 exercices. La feuille comportant les annexes est à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 (7 POINTS)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = x+5+\dfrac{4}{x-1}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

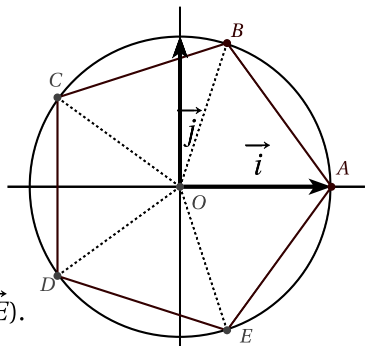
1. Calculer les coordonnées des points d'intersections de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de f.
   Montrer que, pour tout réel $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2}$
3. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $(\mathscr{C})$ au point E d'abscisse 2.
5. On admet que T a pour équation réduite $y = -3x+17$.
   Déterminer les coordonnées du point F de la courbe $(\mathscr{C})$, distincts du point E, en lequel la tangente T' est parallèle à T.

EXERCICE 2 (7 POINTS)

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 4$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. La suite est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. (a) En ANNEXE 2 est représentée la courbe $\mathscr{D}$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x+4$.
   Construire à l'aide de $\mathscr{D}$ et de la droite d'équation $y = x$ les points de l'axe $(O;\vec{i})$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.
   (b) Conjecturer le sens de variation éventuel et la limite éventuelle de la suite (u_n).
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout n, par $v_n = u_n - \dfrac{8}{3}$.
   (a) Calculer v_0, v_1 et v_2.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (c) Exprimer v_n en fonction de n.
   (d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Algorithme : remplir les pointillés l'algorithme en ANNEXE 1 afin qu'il affiche en sortie, pour la suite (u_n), le rang à partir duquel $\left|u_n - \dfrac{8}{3}\right| < 10^{-p}$, la précision de p étant donnée par l'utilisateur.

EXERCICE 3 (6 POINTS)



Soit $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé du plan orienté. On note $(\mathscr{C})$ le cercle trigonométrique de centre O.
$ABCDE$ est un pentagone régulier inscrit dans $\mathscr{C}$.

1. (a) Donner la mesure principale de $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE})$.
   (b) En déduire les coordonnées des points A, B, C, D et E (on ne cherchera pas à calculer les cosinus et sinus intervenant dans ces coordonnées).

2. On admet que l'on a l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{0}$.
   (a) En utilisant une égalité de coordonnées, montrer que l'on a :
   $$(E) \quad 1+2cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=0$$
   (b) Montrer que (E) est équivalente à :
   $$4cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1=0$$
   (c) Résoudre $4X^2+2X-1=0$.
   (d) En déduire que la valeur exacte de $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
3. Calculer alors la longueur exacte des côtés du pentagone.

EXERCICE 4 (5 POINTS)

On considère une roue de fête foraine circulaire partagée en 8 secteurs de même mesure telle qu'il y a :

- 1 secteur de couleur rouge (R)
- 2 secteurs de couleur bleue (B)
- 5 secteurs de couleur verte (V)

Pour participer à ce jeu, chaque joueur doit payer 2 euros et faire tourner la roue sur son axe central suffisamment fort pour qu'on puisse considérer que le roue a la même probabilité de s'arrêter sur chaque secteur et, selon la couleur sur laquelle la roue s'arrête, le joueur gagne :

- 0 euros si c'est le vert
- 3 euros si c'est le bleu
- 5 euros si c'est le rouge

On appelle X la variable aléatoire qui à chaque couleur associe le gain final (gain - mise de départ) correspondant.

1. Décrire la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. (a) Calculer l'espérance de la loi de probabilité de la variable X.
   (b) Interpréter ce résultat en terme de gain.
   (c) Qui est le plus avantagé : l'organisateur ou le joueur ?
3. On dit que le jeu est équitable si l'espérance du gain vaut zéro. Comment modifier les gains pour que le jeu soit équitable.

⋆ ⋆ ⋆ BONUS ⋆ ⋆ ⋆

On suppose désormais que la roue de loterie se compose de trois secteurs rouges, quatre secteurs bleus et n secteurs verts (avec $n \geq 1$) et que la nouvelle règle est :

- si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 16 euros.
- si le secteur repéré est blanc , le joueur perd 12 euros.
- si le secteur repéré est vert, il lance une seconde fois la roue :
  - ◇ si le secteur repéré est rouge, il gagne 8 euros
  - ◇ s'il est blanc, il gagne 2 euros
  - ◇ s'il est vert, il ne gagne rien et ne perd rien

Les résultats sont les gains effectifs, ce que gagne le joueur en tout, mise incluse.

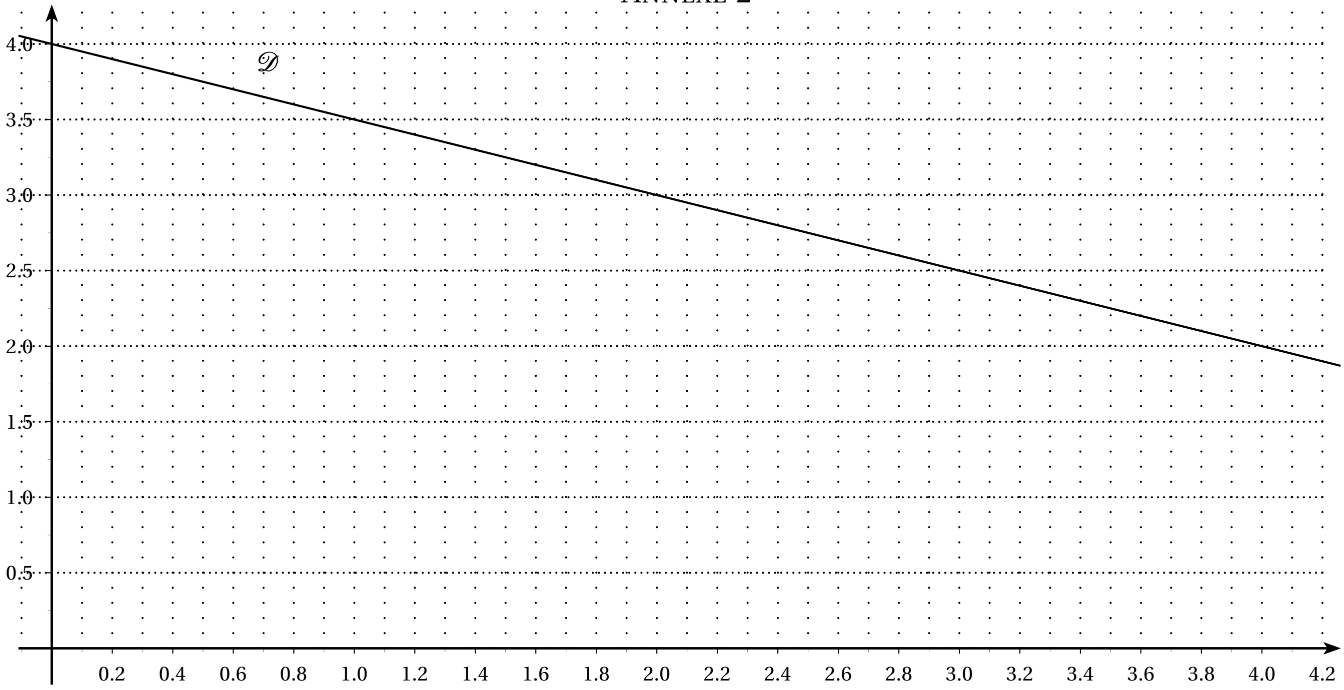
1. Faire un arbre représentant la situation.
2. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n qui représente le gain.
3. Montrer que l'espérance $E(X_n)$ est : $\frac{32n}{(n+7)^2}$
4. Déterminer la valeur de l'entier n pour laquelle l'espérance mathématique de X_n est maximale.Quelle est cette valeur maximale de l'espérance ?

NUMÉRO DE CANDIDAT : ....

ANNEXE 1

VARIABLES
```
n, u et p sont des nombres
```
ENTREE ET INITIALISATIONS
```
Affecter à n la valeur 0
Affecter à u la valeur ................................
Saisir p
```
TRAITEMENT
```
TantQue ................................... faire
   Affecter à n la valeur ................................
   Affecter à u la valeur ...............................
FinTantQue
```
SORTIES
```
Afficher ........
```
FIN

ANNEXE 2



NUMÉRO DE CANDIDAT : ....