Exercice 1 (5)

1- $f'(4) = 6$: réponse (b).

2- Pour tout x de $[1;2]$, $f'(x) \leq 0$: réponse (a).

3- La fonction f a pour expression $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$: réponse (d).

4- La tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -2x$: réponse (b).

5- La fonction $\sqrt{f}$ est décroissante sur $]-\infty ; 1]$: réponse (c).

Exercice 2 (7)

1- a) Pour tout x de $[0; 15]$, $f'(x) = 6x^2 - 120x + 450$ 0,5

1- b) $f'(x)$ est un trinôme du 2nd degré, pour lequel

$\Delta = (-120)^2 - 4 \times 6 \times 450 = 3600$

$\Delta > 0$ Donc $f'(x)$ possède 2 racines : $x_1 = \dfrac{120 - \sqrt{3600}}{2 \times 6} = 5$ et $x_2 = \dfrac{120 + \sqrt{3600}}{2 \times 6} = 15$.

$f'(x)$ étant "du signe de $a = 6$" sauf entre x_1 et x_2, on déduit que :

1

x	0		5		15
$f'(x)$		+	0	−	0

1- c) Tableau de variations de f : 0,5

x	0	α	5	β	15
f	-500 ↗	0	500	0	↘ -500

1- d) D'après la question 1-c), il existe $\alpha \in]0; 5[$ tel que $f(\alpha) = 0$
et il existe $\beta \in]5; 15[$ tel que $f(\beta) = 0$.
grâce à la calculatrice, on obtient $\alpha \approx 1,3$ et $\beta = 10$. 1

2-a) Si $x = 2$, $V(2) = x \times y \times h$
Or $x = 2$; $y = (30 - 2 \times 2) \div 2 = 13$ et $h = 30 - 2 \times 2 = 26$
Donc $V(2) = 2 \times 13 \times 26 = 676 \text{ cm}^3$. 1

2- b) $V(x) = x \times y \times h$. Or $y = \dfrac{30 - 2x}{2} = 15 - x$ et $h = 30 - 2x$ 0,5
Donc $V(x) = x(15 - x)(30 - 2x)$ qui est le résultat voulu.

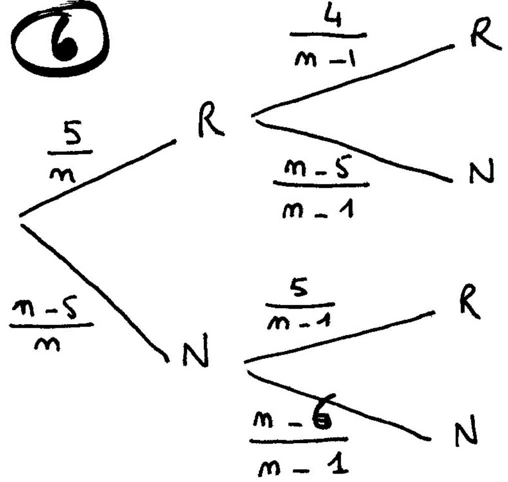
2- c) $f(x) + 500 = 2x^3 - 60x^2 + 450x - 500 + 500 = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.
Or $V(x) = x(15-x)(30-2x) = x(450 - 30x - 30x + 2x^2) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$
Donc $V(x) = f(x) + 500$. 1

2- d) $V(x)$ est maximal lorsque $f(x)$ est maximal, c'est à dire pour $x = 5$. 1
$V_{max} = V(5) = f(5) + 500 = 500 + 500 = 1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ L}$. 0,5

3) $V(x) = 500 \iff f(x) + 500 = 500 \iff f(x) = 0$. D'après le 1d), il y a 2 possibilités, pour $x = \alpha$ ou $x = \beta$.

Exercice 3 6

1) Arbre :



1

2-a) $P(A) = P(RN) + P(NR) = \frac{5}{m} \times \frac{m-5}{m-1} + \frac{m-5}{m} \times \frac{5}{m-1}$

$P(A) = \frac{5(m-5) + 5(m-5)}{m(m-1)}$ d'où $\underline{P(A) = \frac{10m - 50}{m^2 - m}}$. 1,5

2-b) Les valeurs possible pour X sont -1 et 2

$P(X=2) = P(A) = \frac{10m-50}{m^2-m}$

$P(X=-1) = P(\overline{A}) = 1 - \frac{10m-50}{m^2-m} = \frac{m^2 - m - 10m + 50}{m^2 - m} = \frac{m^2 - 11m + 50}{m^2 - m}$

D'où la loi de X :

x_i	-1	2
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{m^2-11m+50}{m^2-m}$	$\frac{10m-50}{m^2-m}$

1,5

2-c) $E(X) = -1 \times P(X=-1) + 2 \times P(X=2)$

$E(X) = -\frac{m^2-11m+50}{m^2-m} + 2\,\frac{10m-50}{m^2-m} = \frac{-m^2+11m-50+20m-100}{m^2-m}$

d'où $\underline{E(X) = \frac{-m^2+31m-150}{m^2-m}}$. 1

3) Le jeu est équitable si et seulement si $\underline{E(X)=0}$.

Or $E(X) = 0 \iff -m^2 + 31m - 150 = 0$ ← équation du 2nd degré en m.

$\Delta = 31^2 - 4 \times (-1) \times (-150) = 361$ $\quad\Delta > 0$: il y a 2 racines : $m_1 = 25$ et $m_2 = 6$

Donc le jeu est équitable $\underline{\text{lorsque } m = 6 \text{ ou } m = 25}$. 1

Exercice 4 1a) Dans $(B; \vec{BC}; \vec{BA})$: (7)

$B(0;0)$ $C(1;0)$ $A(0;1)$ $I(0;\frac{1}{4})$ et $J(\frac{1}{3};0)$. **1**

1b) $\vec{BK} = \vec{BA} + \vec{AK} = \vec{BA} + \frac{3}{5}\vec{AC} = \vec{BA} + \frac{3}{5}(\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{BA} + \frac{3}{5}(\vec{BC} - \vec{BA})$

Donc $\vec{BK} = \frac{3}{5}\vec{BC} + \vec{BA} - \frac{3}{5}\vec{BA}$ donc $\vec{BK} = \frac{3}{5}\vec{BC} + \frac{2}{5}\vec{BA}$

ce qui prouve que K a pour coordonnées $K(\frac{3}{5}; \frac{2}{5})$. **1**

2.a) $M(x;y) \in (AJ) \iff \vec{AM}$ et $\vec{AJ}$ sont colinéaires

Or $\vec{AM}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AJ}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix}$ soit $\vec{AJ}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc $M(x;y) \in (AJ) \iff -x - \frac{1}{3}(y-1) = 0$

$\iff -x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} = 0$

$\iff 3x + y - 1 = 0$ **1**

Donc (AJ) a pour équation cartésienne $3x + y - 1 = 0$.

2-b) $M(x;y) \in (BK) \iff \vec{BM}$ et $\vec{BK}$ sont colinéaires

Or $\vec{BM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{BK}\begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$

Donc $M(x;y) \in (BK) \iff \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}y = 0$

$\iff 2x - 3y = 0$ **1**

2-c) E appartient à (AJ) et à (BK), donc ses coordonnées sont solution du système $\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 & (1) \\ 2x - 3y = 0 & (2) \end{cases}$

D'après (1) : $y = 1 - 3x$ (3)

On remplace dans (2) : $2x - 3(1-3x) = 0$

$2x - 3 + 9x = 0$

$11x = 3$

$x = \frac{3}{11}$

On remplace dans (3) :

$y = 1 - 3 \times \frac{3}{11}$

$y = 1 - \frac{9}{11}$

$y = \frac{2}{11}$ **1,5**

D'où $E\left(\frac{3}{11}; \frac{2}{11}\right)$.

3) $M(x;y) \in (CI) \iff \vec{CM}$ et $\vec{CI}$ sont colinéaires $\iff x + 4y - 1 = 0$.

Or $x_E + 4y_E - 1 = \frac{3}{11} + 4 \times \frac{2}{11} - 1 = \frac{3}{11} + \frac{8}{11} - \frac{11}{11} = 0$ **1,5**

Donc $E \in (CI)$.

On en déduit que (AJ), (BK) et (CI) sont concourants en E.

Exercice 5 (5)

1- a) $U_1 = U_0 + 2\times(0+1) = 0 + 2\times 1$ d'où $\underline{U_1 = 2}$.

$U_2 = U_1 + 2\times(1+1) = 2 + 2\times 2$ d'où $\underline{U_2 = 6}$. **1,5**

$U_3 = U_2 + 2\times(2+1) = 6 + 2\times 3$ d'où $\underline{U_3 = 12}$.

1-b) . $U_1 = 2 = 1^2 + 1$ donc la <u>proposition 1 est vraie</u>

($n = 1$ convient) **0,5**

. $U_0 = 0$ alors que $0^2 + 1 = 1$, ce qui prouve que la <u>proposition 2 est fausse</u>. **0,5**

2 - a) Testons l'algorithme <u>pour $N = 3$</u> :

	N	P	K
étape 1	3		
étape 2	3	0	
étape 3	3	0	0
étape 4	3	1	1
étape 5	3	3	2
étape 6	3	6	3

1,5

<u>affichage</u> : 0 ; 1 ; 3 ; 6

On n'obtient donc pas les 4 premiers termes de (U_n).

2 - b) <u>Traitement</u> : Pour K allant de 0 à N
affecter à P la valeur P + 2K
afficher P
Fin Pour

1