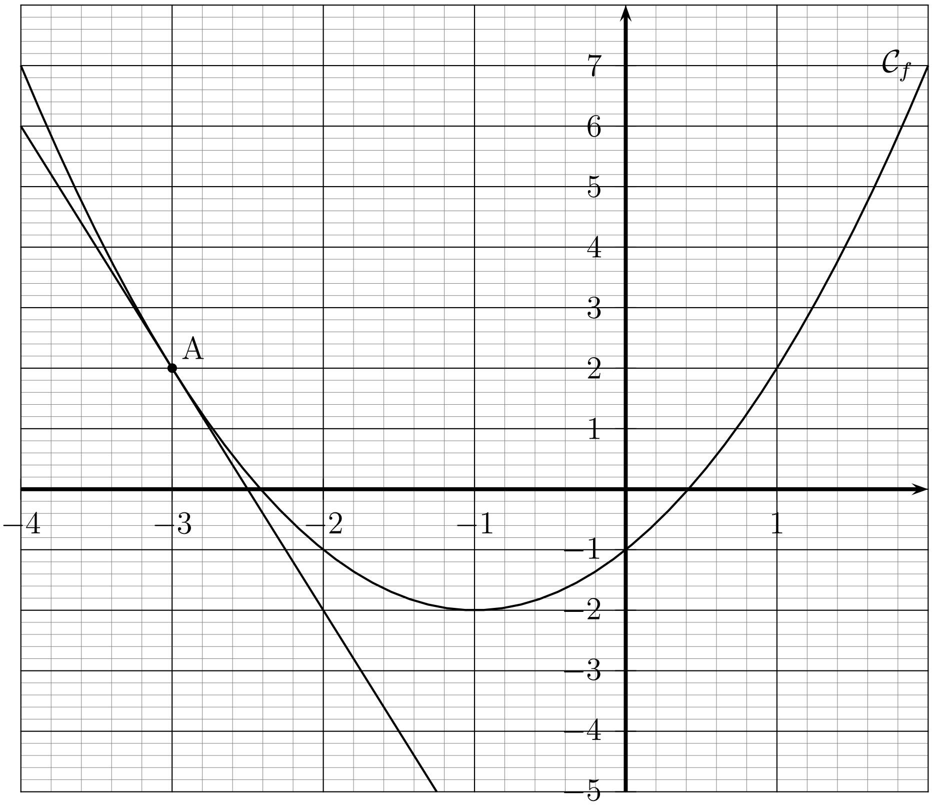
1re S – Mathématiques

Corrigé du devoir commun du 22/04/2013

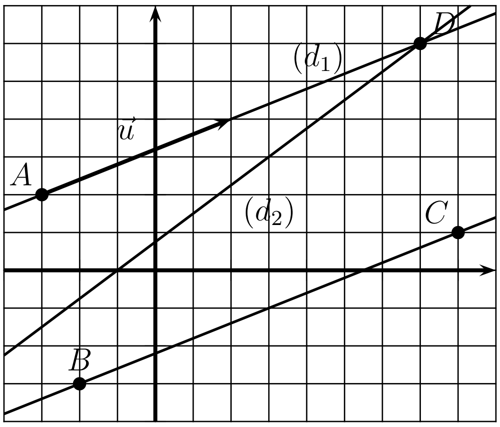
Exercice 1

$f(x) = x^2 + 2x - 1.$

1. **Dérivée :** $\boxed{f'(x) = 2x + 2}$
2. **Tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse** -3
   $f'(-3) = 2 \times (-3) + 2 = \boxed{-4}$
   Donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse -3 est $\boxed{4}$.
   Point A et tracé de la tangente (d) : voir figure.
3. **Équation réduite de la droite** (d)**.**
   Puisque le coefficient directeur de la droite (d) est 4, son équation réduite est de la forme : $y = -4x + b$.
   Calculons l'ordonnée de A : $f(-3) = (-3)^2 + 2 \times (-3) - 1 = 2$
   Or, le point A appartient à la droite (d), donc $2 = -4 \times (-3) + b \iff b = 2 - 12 = -10$.
   L'équation réduite de la droite (d) est donc : $\boxed{y = -4x - 10}$



Exercice 2



1. **Point** $A\ (-3\ ;\ 2)$ **:** sur la figure.
2. La droite (d_1) passe par le point A et $\vec{u}\ (5\ ;\ 2)$ est un vecteur directeur de (d_1).
   (a) **Droite** (d_1) **:** sur la figure.
   (b) **Calcul d'une équation cartésienne de la droite** (d_1)**.**
   Puisque $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d_1), une équation cartésienne de la droite (d_1) s'écrit : $2x - 5y + c = 0$.
   Comme $A \in (d_1)$, on a : $2 \times (-3) - 5 \times 2 + c = 0 \iff -16 + c = 0 \iff c = 16$
   Une équation cartésienne de la droite (d_1) est donc : $\boxed{2x - 5y + 16 = 0}$.
3. $B\ (-2\ ;\ -3)\quad C\ (8\ ;\ 1)$
   (a) **Droite** (BC) **:** sur la figure.
   (b) **Parallélisme des droites** (d_1) **et** (BC)
   Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$:
   $x_C - x_B = 8 - (-2) = 10 \qquad y_B - y_C = 1 - (-3) = 4$
   On obtient : $\overrightarrow{BC}\ (10\ ;\ 4)$.
   Sachant que $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}\ (5\ ;\ 2)$ sont des vecteurs directeurs respectifs des droites (BC) et (d_1), déterminons si ils sont colinéaires.
   $10 \times 2 - 5 \times 4 = 20 - 20 = 0$ donc $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires
   donc $\boxed{\text{les droites } (BC) \text{ et } (d_1) \text{ sont parallèles}}$.
4. $(d_2) : 3x - 4y + 3 = 0$ **Tracé de la droite** (d_2) **:** sur la figure
5. **Coordonnées de** D**, point d'intersection des droites** (d_1) **et** (d_2)**.**

Pour éliminer y on procède par soustraction ci-dessous.

$$\begin{cases} 2x - 5y = -16 \\ 3x - 4y = -3 \end{cases} \left|\begin{array}{l} \times(-4) \\ \times 5 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 8x + 20y = 64 \\ 15x - 20y = -15 \end{cases} \\ \hline 7x = 49 \\ x = \dfrac{49}{7} \\ x = 7 \end{array}$$

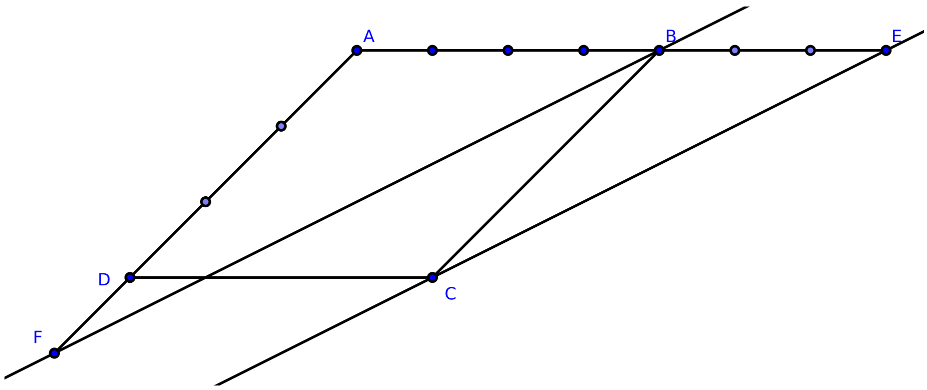
On remplace maintenant x par sa valeur dans une des deux équations.

$$\begin{array}{rcl} 2x - 5y &=& -16 \\ 2 \times 7 - 5y &=& -16 \\ -5y &=& -16 - 14 \\ -5y &=& -30 \\ y &=& \dfrac{-30}{-5} \\ y &=& 6 \end{array}$$

Donc les coordonnées de D sont : $\boxed{D\ (7\ ;\ 6)}$

Exercice 3

$ABCD$ est un parallélogramme. Les points E et F sont définis par : $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.



1. **Figure :** ci-dessus.
2. **Décomposition de chaque vecteur $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.**
   $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}$ d'après la relation de Chasles, et $\overrightarrow{CE} = \boxed{\overrightarrow{DA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}}$ d'après les hypothèses.

   De même : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \boxed{-\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}}$
3. **Parallélisme des droites (CE) et (BF).**
   On a : $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}\right) = -\frac{3}{4}\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}\right) = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$
   Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont donc colinéaires.
   On en déduit que les droites (CE) et (BF) sont parallèles.

Exercice 4

1. La fonction carré est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. La fonction carré et la fonction définie par $u(x) = 1 + x^2$ ont le même sens de variation, donc la fonction u est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ or les fonctions u et $\frac{1}{u}$ ont des sens de variation contraires, donc la fonction $\frac{1}{u}$, c'est à dire la fonction f, est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. $f(0) = \frac{1}{(1+0^2}= 1$, et on vient de prouver que la fonction f est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   Donc : si $x \geqslant 0$, alors $f(x) \leqslant f(0)$ or $f(0) = 1$ autrement dit : si $x \geqslant 0$, alors $f(x) \leqslant 1$

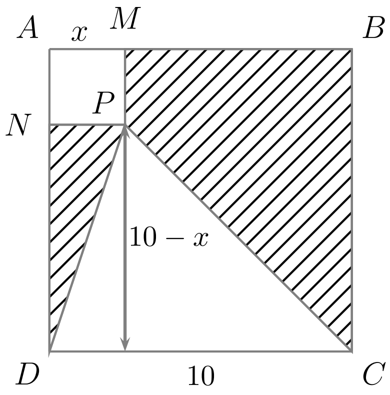
Exercice 5

1. **Exécution de l'algorithme et tableau.**

k	***	1	2	3	4	5	6
a	***	13	8	14	11	9	17
s	0	13	21	35	46	55	72

2. **Qu'affiche cet algorithme à la sortie ?** le résultat affiché est : $\frac{72}{6} = \boxed{12}$
3. **Ce que fait cet algorithme pour la liste de nombres : 13 ; 8 ; 15 ; 11 ; 9 ; 17**
   Cet algorithme calcule la somme de ces six nombres et divise le résulat par 6, autrement dit, cet algorithme calcule $\boxed{\text{la moyenne de ces nombres}}$.

Exercice 6



1. $S(x) = \text{aire}(ABCD) - \text{aire}(AMPN) - \text{aire}(DPC)$
   Or : $\text{aire}(ABCD) = 10^2 = 100$ et $\text{aire}(AMNP) = x^2$
   et $\text{aire}(DPC) = \dfrac{10 \times (10-x)}{2} = \dfrac{100 - 10x}{2} = 50 - 5x$
   Par suite : $S(x) = 100 - x^2 - (50 - 5x) = 100 - x^2 - 50 + 5x = -x^2 + 5x + 50$
2. (a) On obtient la forme canonique de S :
   $$S(x) = -(x - 2,5)^2 + 56,25$$
   On en déduit le tableau de variations de S :

x	$-\infty$	$2,5$	$+\infty$
$S(x)$	↗	$56,25$	↘

   (b) L'aire $S(x)$ est maximale pour $x = 2,5$. L'aire maximale est de $56,25$ cm^2.
3. Il s'agit de résoudre l'inéquation $S(x) \leqslant x^2$ sur l'intervalle $[0 ~;~ 10]$:
   $$\begin{aligned} & S(x) \leqslant x^2 \\ \Leftrightarrow & -x^2 + 5x + 50 \leqslant x^2 \\ \Leftrightarrow & -x^2 + 5x + 50 - x^2 \leqslant 0 \\ \Leftrightarrow & -2x^2 + 5x + 50 \leqslant 0 \end{aligned}$$
   On considère le trinôme $-2x^2 + 5x + 50$:
   $\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times 50 = 425$
   $-2x^2 + 5x + 50$ admet deux racines :
   $x_1 = \dfrac{-5 - \sqrt{425}}{-4} \approx 6,40$ et $x_2 = \dfrac{-5 - \sqrt{425}}{-4} \approx -3,90$.
   On en déduit que :
   - $-2x^2 + 5x + 50 > 0 \Leftrightarrow x \in]x_2 ~;~ x_1[$
   - $-2x^2 + 5x + 50 < 0 \Leftrightarrow x \in [-\infty ~;~ x_2[\cup]x_1 ~;~ +\infty[$

   Par suite :
   $$S(x) \leqslant x^2 \Longleftrightarrow x \in [x_1 ~;~ 10]$$
   $\mathcal{S} = [x_1 ~;~ 10]$