# Corrigé Du Devoir Commun De Mathématiques 1S (2015)

**Exercice 1 (5 points) :** **1. a. ; 2. b. ; 3. d. ; 4. d. ; 5. c.**

**1.** $65 < \frac{197}{3} < 66$ ; $\frac{197\pi}{3} - 66\pi = \frac{197\pi - 198\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ ; donc **a.**

**2.** Sur $\mathbb{R} - \{1{,}25\}$, $f(x) = \frac{-3x^2+2}{5-4x} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec :

$u(x) = -3x^2 + 2$ et $v(x) = 5 - 4x$ ; alors : $u'(x) = -6x$ et $v'(x) = -4$

$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ ; $f'(x) = \frac{-6x(5-4x) + 4(-3x^2+2)}{(5-4x)^2} = \frac{-30x + 24x^2 - 12x^2 + 8}{(5-4x)^2} = \frac{12x^2 - 30x + 8}{(5-4x)^2}$ ; donc **b.**

**3.** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{15}{64} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{49}{64} \Leftrightarrow \sin x = \frac{7}{8}$ ou $\sin x = -\frac{7}{8}$

Or $x \in ]-\pi ; 0]$ donc $\sin x < 0$ donc $\sin x = -\frac{7}{8}$ ; donc **d.**

**4.** $x^2 - x - 1 \geq 0$ : $\Delta = 5$ ; $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ; $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ; $a = 1 > 0$ ; donc **d.**

**5.** $\overrightarrow{u}(-b ; a)$ et $\overrightarrow{u}(-1 ; 2)$ donc $a = 2$ et $b = 1$; donc **c.**

**Exercice 2 (7,5 points) :**

**1) a)** $A \in C_f$ donc $y_A = f(x_A) = f(\frac{1}{2}) = \mathbf{2}$ ;

$B \in C_f$ donc $y_B = f(x_B) = f(5) = \mathbf{\frac{1}{5}}$ .

**c)** $I(x_I ; y_I)$ est le milieu de [AB] donc

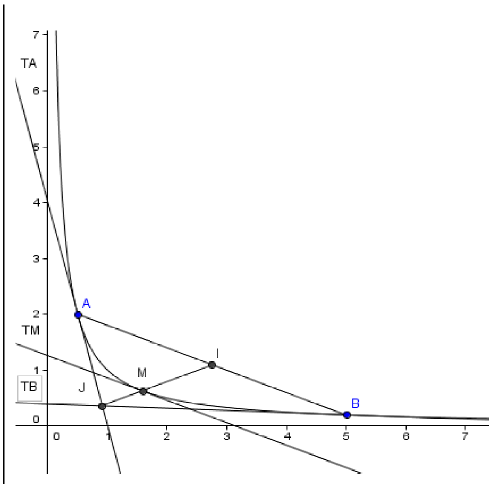
$\boldsymbol{x_I} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{1}{2}+5}{2} = \mathbf{\frac{11}{4}}$ et $\boldsymbol{y_I} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+\frac{1}{5}}{2} = \mathbf{\frac{11}{10}}$ .

**2) a)** $f$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Par théorème, l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse $x_A$ est donnée par la formule : $T_A : y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$.

On obtient alors $T_A : y = \frac{-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2$,

soit $T_A : y = -4(x - \frac{1}{2}) + 2$. Après avoir réduit, $\boldsymbol{T_A : y = -4x + 4}$.




De même, $T_B : y = f'(x_B)(x - x_B) + f(x_B)$.

On obtient alors $T_B : y = \frac{-1}{5^2}(x - 5) + \frac{1}{5}$. Après avoir réduit, $\boldsymbol{T_B : y = \frac{-1}{25}x + \frac{2}{5}}$.

**c)** $J(x_J ; y_J)$est le point d'intersection de $T_A$et de $T_B$, ses coordonnées vérifient donc :

$-4x_J + 4 = \frac{-1}{25}x_J + \frac{2}{5}$ et $y_J = -4x_J + 4$.

La première équation donne : $x_J = \frac{\frac{2}{5}-4}{-4+\frac{1}{25}} = \frac{\frac{-18}{5}}{\frac{-99}{25}} = \frac{10}{11}$.

La deuxième équation donne $y_J = -4 \times \frac{10}{11} + 4 = \frac{-40}{11} + 4 = \frac{4}{11}$. Donc $\boldsymbol{J(\frac{10}{11} ; \frac{4}{11})}$.

**3) a)** La droite (IJ) admet une équation réduite de la forme $y = ax + b$ avec : $a = \frac{y_J - y_I}{x_J - x_I} = \frac{\frac{4}{11} - \frac{11}{10}}{\frac{10}{11} - \frac{11}{4}} = \frac{\frac{-81}{110}}{\frac{-81}{44}} = \frac{2}{5}$

De plus, comme $I \in (IJ)$, $b$ vérifie : $\frac{11}{10} = \frac{2}{5} \times \frac{11}{4} + b$ et donc $b = 0$. L'équation réduite de (IJ) est $\boldsymbol{y = \frac{2}{5}x}$.

**b)** $M(x_M ; y_M)$ appartient à $C_f$ donc $y_M = \frac{1}{x_M}$ et M appartient à (IJ) donc $y_M = \frac{2}{5}x_M$.

On obtient alors l'équation $\frac{1}{x_M} = \frac{2}{5}x_M$ qui est équivalente à $x_M^2 = \frac{5}{2}$.

Cette équation admet deux solutions : $\sqrt{\frac{5}{2}}$ ou$-\sqrt{\frac{5}{2}}$ . Comme $x_M$est positif on a $\boldsymbol{x_M = \sqrt{\frac{5}{2}}}$ et donc $\boldsymbol{y_M = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}}}$ .

**4)** Par définition le coefficient directeur de $T_M$ est égal à $f'(x_M)$. Or $f'(x_M) = f'(\sqrt{\frac{5}{2}}) = \frac{-1}{(\sqrt{\frac{5}{2}})^2} = \mathbf{\frac{-2}{5}}$.

Par ailleurs, la droite (AB) a pour coefficient directeur : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{1}{5} - 2}{5 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{-9}{5}}{\frac{9}{2}} = \mathbf{\frac{-2}{5}}$.

$T_M$ et (AB) ont le même coefficient directeur, **elles sont donc parallèles.**

**<u>Exercice 3 (7,5 points)</u> :**

**1.** Tous les ans, la somme épargnée étant augmentée de 2 %, elle est multipliée par $1 + \frac{2}{100} = 1{,}02$.

De plus, M. B. y ajoute un montant de 600 €. On a donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} = 1{,}02\, u_n + 600}$.

**2. a)** $\boldsymbol{u_1} = 1{,}02u_0 + 600 = 102 + 600 = \mathbf{702}$ ; $\boldsymbol{u_2} = 1{,}02u_1 + 600 = 716{,}04 + 600 = \mathbf{1316{,}04}$.

**b)** $u_1 - u_0 = 602$ ; $u_2 - u_1 = 614{,}04$ ; $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc **la suite $(u_n)$ n'est pas arithmétique.**

$\frac{u_1}{u_0} = 7{,}02$ ; $\frac{u_2}{u_1} < 2$ ; $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc **la suite $(u_n)$ n'est pas géométrique.**

**c)**

| | |
|---|---|
| *<u>Entrée</u>* | Saisir $n$ |
| *<u>Traitement</u>* | $U$ prend la valeur 100 |
| | Pour I variant de 1 à $n$ |
| | $U$ prend la valeur $1{,}02 \times U + 600$ |
| | Fin Pour |
| *<u>Sortie</u>* | Afficher $U$ |

**3.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 30\,000$.

**a)** $v_{n+1} = u_{n+1} + 30\,000 = 1{,}02\, u_n + 600 + 30\,000 = 1{,}02\, u_n + 30\,600$.

$v_{n+1} = 1{,}02\left(u_n + \frac{30\,600}{1{,}02}\right) = 1{,}02(u_n + 30\,000) = 1{,}02 v_n$.

**Donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 1,02 et de 1er terme $v_0$** $= u_0 + 30\,000 =$ **30 100.**

**b)** On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\boldsymbol{v_n} = v_0\, q^n = \mathbf{30\,100 \times 1{,}02^{\boldsymbol{n}}}$ .

**c)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 30\,000$ donc $\boldsymbol{u_n} = v_n - 30\,000 = \mathbf{30\,100 \times 1{,}02^{\boldsymbol{n}} - 30\,000.}$

**d)** $u_{18} = 30\,100 \times 1{,}02^{18} - 30\,000$, soit $u_{18} \approx 12\,990$.

**L'année de ses 18 ans, la somme disponible sur son compte sera de 12 990 €.**

**4. a)** On saisit $A = 3\,000$ (si nécessaire, les valeurs de $U$ ont été arrondies au centième)

| $U$ | 100 | 702 | 1316,04 | 1942,3608 | 2581,21 | 3232,83 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

**Pour A = 3 000, la valeur affichée de *n* est 5.**

La valeur affichée de $n$ en sortie est l'indice du premier terme de la suite $(u_n)$ supérieur ou égal à la valeur de A saisie en entrée, c'est-à-dire **le nombre d'années à partir duquel la somme épargnée atteint un montant donné.**

**b)** Sur la calculatrice, en programmant l'algorithme donné, ou en faisant une table de valeurs, ou encore en testant des valeurs de $n$ (on sait d'après le 3.d. que $n \leq 18$) on obtient que Louise aura un capital de 10 000 € **au bout de 15 ans**.

**<u>Exercice 4 (Hors barème)</u> :** ***Proposition d'une solution***

Dans le repère $(B ; \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA})$ : **B(0 ; 0)** **C(1 ; 0)** **A(0 ; 1)** $\mathbf{I}\left(\mathbf{0} ; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)$ $\mathbf{J}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} ; \mathbf{0}\right)$

$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{BA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ donc $\mathbf{K}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} ; \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right)$.

Soit $M(x ; y)$ appartient à la droite (AJ). $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$.

$M(x ; y) \in (AJ) \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow -x - \frac{1}{3}(y-1) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 1 = 0$

**(AJ) a pour équation $\boldsymbol{3x + y - 1 = 0}$.**

De même, avec $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on obtient l'équation de **(BK)** : $\boldsymbol{2x - 3y = 0}$.

Les coordonnées de E vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 3x \\ 2x - 3(1-3x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 3x \\ 11x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{11} \\ x = \frac{3}{11} \end{cases}$$ donc $\mathbf{E}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{11}} ; \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{11}}\right)$.

Il suffit de démontrer que les points C, E et I sont alignés. On a $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{11}} \\ \frac{2}{11} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \end{pmatrix}$.

Le test de colinéarité permet de dire que $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires.

**Les droites (CI), (BK) et (AJ) sont concourantes.**