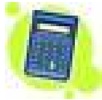
1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du jeudi 2 février 2017 (3 heures)



• Le barème est donné sur 40.

• Il est demandé de ne rien écrire sur l'énoncé.

I. (8 points)

Partie 1 (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

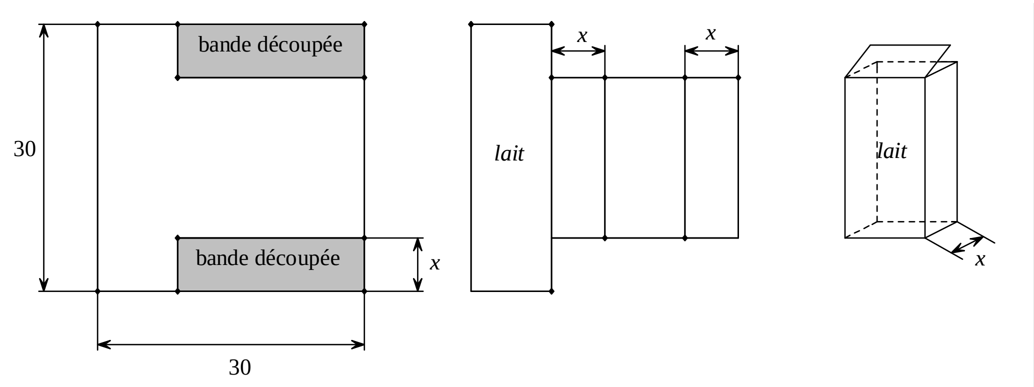
On considère la fonction $f : x \mapsto x(15-x)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous forme factorisée en facteurs du premier degré.

2°) Faire un tableau comprenant l'étude précise du signe de $f'(x)$ et les variations de f.

Partie 2 (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Un fabriquant envisage la production de briques de lait en carton. Au départ, il dispose d'une feuille carrée en carton dans laquelle on a retiré deux bandes de même largeur. Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la largeur des bandes découpées en centimètres. On suppose que $0 < x < 15$.



(ne rien écrire sur les figures)

1°) Exprimer le volume $V(x)$ de la brique en cm^3 en fonction de x sous forme factorisée.

2°) Pour quelle valeur de x le volume de la brique est-il maximal ? Justifier brièvement.

Quelle est la valeur du volume maximal ?

II. (9 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point ; 5°) 2 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$ où a et b sont des réels fixés.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$ en fonction de x, a, b. On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2°) On sait que la courbe $\mathcal{C}$ possède les propriétés suivantes :

• $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point A d'ordonnée 2 ;

• la tangente au point B de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1 est parallèle à la tangente au point A.

Démontrer que $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2+1}$ pour tout réel x.

3°) Faire un tableau comprenant l'étude précise du signe de $f'(x)$ et les variations de f.

4°) Recopier et compléter la phrase suivante sans justifier :

« Les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est horizontale sont égales à ……………… . »

5°) On note E le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse – 2 et F le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

Démontrer que la droite (EF) est la tangente en F à $\mathcal{C}$. On répondra avec clarté et concision.

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Les 700 salariés d'une usine sont répartis en deux catégories A et B.
La catégorie A comporte 140 salariés.
Des stages de formation continue sont organisés chaque année tels que :
- chaque salarié participe à un stage au plus ;
- 9 % des salariés partent en stage ;
- 10 % des salariés de la catégorie A partent en stage.

Chaque stage dure 10 jours pour un salarié de catégorie A et 8 jours pour un salarié de catégorie B. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de jours de stage suivis par un salarié de l'usine durant une année.

Il est conseillé de faire un tableau à double entrée sur le modèle suivant :

	Catégorie A	Catégorie B	Total
Fait un stage			
Ne fait pas de stage			
Total			

1°) Recopier et compléter la phrase : « X peut prendre les valeurs : $x_1 = ...$, $x_2 = ...$, $x_3 = ...$ ».

Donner la loi de probabilité de X dans un tableau. On écrira les probabilités sous forme décimale.

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. On donnera les résultats sous forme décimale.

IV. (8 points : 1°) a) 1 point ; b) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

On dispose de trois boules indiscernables au toucher numérotées 1, 2, 3 placées dans une urne et de deux pièces équilibrées A et B. Un jeu consiste à tirer plusieurs fois une boule dans l'urne en la remettant chaque fois dans l'urne.

Après chaque tirage, si l'on obtient la boule portant le numéro 1, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient la boule portant le numéro 2, alors on retourne la pièce B et si l'on on obtient la boule portant le numéro 3, alors on ne retourne aucune des deux pièces. Au début du jeu, les deux pièces sont du côté face.

1°) Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1-a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.
Les variables a, b, n, i, r, s sont des entiers naturels. De plus, la valeur de n saisie en entrée doit être supérieure ou égale à 1.

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0
b prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 1 jusqu'à n **Faire**
  r prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 3 (au sens large)
  Si $r=1$
    Alors a prend la valeur $1-a$
  FinSi
  Si $r=2$
    Alors b prend la valeur $1-b$
  FinSi
  s prend la valeur $a+b$
FinPour

Sortie :
Afficher s

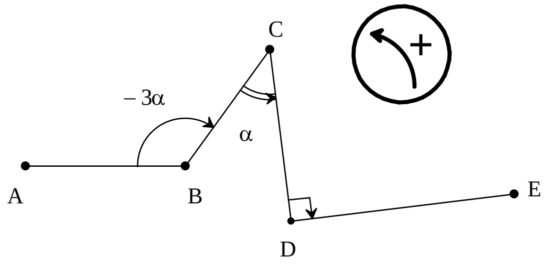
a) On exécute cet algorithme en saisissant la valeur 3 pour n en entrée et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour r sont 3, 1 et 1.
Quelle est la valeur de s affichée en sortie ?
On pourra recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (ne rien écrire dans le tableau ci-dessous).

variables	i	r	a	b	s
initialisation			0	0	
1$^{\text{er}}$ passage dans la boucle Pour					
2$^{\text{e}}$ passage dans la boucle Pour					
3$^{\text{e}}$ passage dans la boucle Pour					

b) Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ? Répondre par oui ou non sans justifier.
2°) Calculer la probabilité qu'à l'issue de deux tirages de boules dans l'urne les deux pièces soient du côté face.
3°) Calculer la probabilité qu'à l'issue de trois tirages de boules dans l'urne les deux pièces soient du même côté.
4°) On effectue n tirages de boules dans l'urne (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1).
Exprimer en fonction de n la probabilité que l'on ait toujours retourné la même pièce à l'issue des n tirages.
Déterminer le nombre minimal de tirages à effectuer pour que cette probabilité soit strictement inférieure à 10^{-5}.

V. (5 points : 1°) 1 + 2 points ; 2°) 2 points)

Dans le plan orienté, on considère la ligne brisée ABCDE ci-dessous où α est un réel (ne rien écrire sur la figure).
On a : $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)=-3\alpha$, $\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\right)=\alpha$, $\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DE}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$.



1°) Recopier et compléter l'égalité : $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{DE}\right)=(\ldots\ldots;\ldots\ldots)+\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{DC}\right)+(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$.

En déduire une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{DE}\right)$ en fonction de α.

2°) Déterminer pour quelles valeurs de α les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires de même sens.
On rédigera selon le modèle suivant à recopier et compléter :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{DE}\right)=$ ....

si et seulement si …………………..
si et seulement si …………………..

VI. (6 points : 1°) 4 points ; 2°) 2 points)

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.
On considère les points $A(1\,;0)$, $B(0\,;1)$, $A'(-1\,;0)$, $B'(0\,;-1)$.

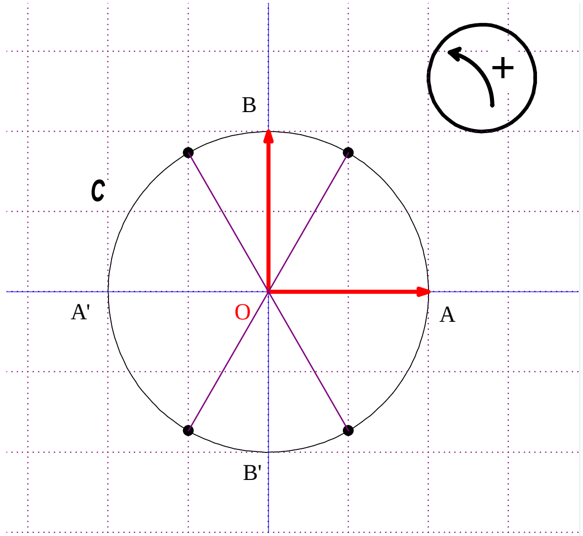
1°) Marquer sur le cercle $\mathcal{C}$ les points E, F, G, H ainsi définis :

$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OE}\right)=-\dfrac{107\pi}{3}$;

$\left(\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OE}\right)=\dfrac{26\pi}{3}$;

$\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OG}\right)=\dfrac{13\pi}{6}$;

$\left(\overrightarrow{OH}\,;\overrightarrow{OA'}\right)=\dfrac{95\pi}{3}$.



2°) Quel est l'ensemble des réels de l'intervalle $[-\pi\,;2\pi]$ dont l'image appartient à l'arc $\overset{\frown}{GH}$ (extrémités comprises) ?

Copie du contrôle du 2-2-2017

I.

Partie 1 (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°)

Partie 2 (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (9 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point ; 5°) 2 points)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°)

4°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

5°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°)

2°) ……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

IV. (8 points : 1°) a) 1 point ; b) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

1°) a) …………… (une seule réponse, sans égalité) b) …………… (une seule réponse, sans faire de phrase)

2°) …………………… (une seule réponse, sans égalité)

3°) …………………… (une seule réponse, sans égalité)

4°) …………………… (une seule réponse, sans égalité) ; …………………… (une seule réponse, sans égalité)

V. (5 points : 1°) 1 + 2 points ; 2°) 2 points)

1°) ……

……

……

……

……

……

……

2°) ……

……

……

……

……

……

……

……

……

VI. (6 points : 1°) 4 points ; 2°) 2 points)

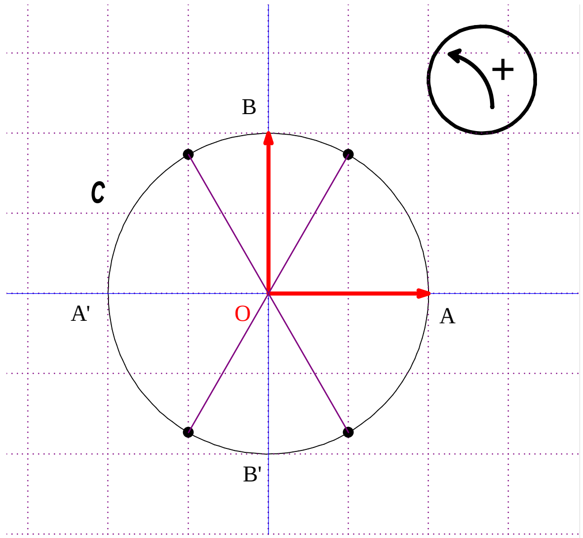
1°)

$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OE}\right)=-\dfrac{107\pi}{3}$;

$\left(\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OE}\right)=\dfrac{26\pi}{3}$;

$\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OG}\right)=\dfrac{13\pi}{6}$;

$\left(\overrightarrow{OH}\,;\overrightarrow{OA'}\right)=\dfrac{95\pi}{3}$.



2°) ……………………… (une seule réponse sans faire de phrase, sans justifier)

Prénom : ……………………………… *Nom :* ………………………………

I	II	III	IV	V	VI	Total/40	Total/20

Corrigé du contrôle du 2-2-2017

I.

Partie 1

On considère la fonction $f : x \mapsto x(15-x)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous forme factorisée en facteurs du premier degré.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = 1\times(15-x)^2 + x\times 2\times(-1)\times(15-x)$ (« sous-dérivée » à faire)

$$= (15-x)(15-x-2x)$$

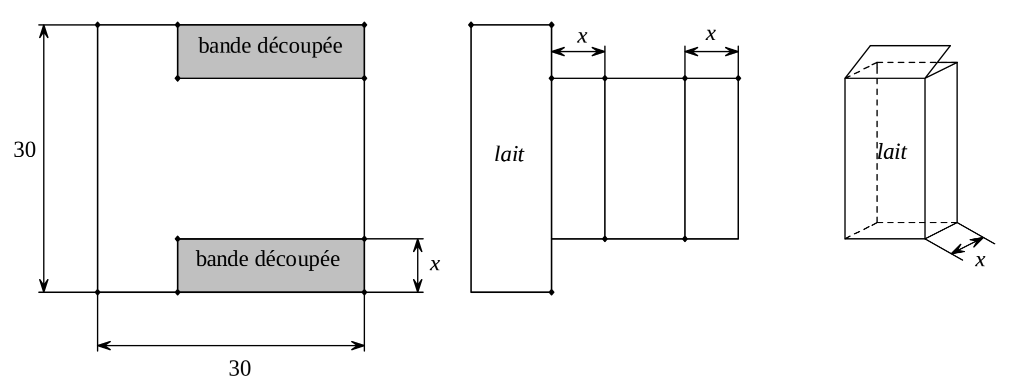
$$= (15-x)(15-3x)$$

2°) Faire un tableau comprenant l'étude précise du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

x	$-\infty$		5		15		$+\infty$
Signe de $15-x$		+		+	0	–	
Signe de $15-3x$		+	0	–		–	
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de *f*		↗	500	↘	0	↗	

Partie 2

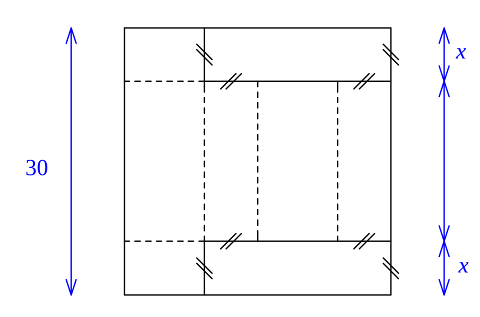
Un fabriquant envisage la production de briques de lait en carton. Au départ, il dispose d'une feuille carrée en carton dans laquelle on a retiré deux bandes de même largeur. Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la largeur des bandes découpées en centimètres. On suppose que $0 < x < 15$.



(ne rien écrire sur les figures)

1°) Exprimer le volume $\mathrm{V}(x)$ de la brique en cm^3 en fonction de x sous forme factorisée.

Cette question nécessite une réflexion sur le patron de la brique pour déterminer correctement les dimensions de la brique en fonction de x, comme le montre la figure ci-dessous (en pointillés, les lignes de pliage). On peut éventuellement donner des noms aux points.



Les dimensions de la brique en centimètres sont x, $30-2x$, $\dfrac{30-2x}{2} = 15-x$.

On applique la formule donnant le volume d'un pavé droit.

$$\mathrm{V}(x) = x\times(30-2x)\times(15-x)$$

$$= 2x(15-x)(15-x)$$

$$= 2x(15-x)^2$$

2°) Pour quelle valeur de x le volume de la brique est-il maximal ? Justifier brièvement.

Quelle est la valeur du volume maximal ?

On constate que $\forall x \in \left]0\,;15\right[\quad \mathrm{V}(x) = 2f(x)$.

Or $2 > 0$.

Donc la fonction V a les mêmes variations que *f* sur $\left]0\,;15\right[$.

D'après le tableau de variations établi à la question 2°) de la partie 1, le maximum global de *f* sur l'intervalle $\left]0\,;15\right[$ est égal à 500 ; il est obtenu pour $x = 5$.

Donc le volume de la brique est maximal pour $x = 5$.

On peut déterminer le volume maximal (bien que cela ne soit pas demandé).

$$\mathrm{V}(5) = 2\times 500 = 1000$$

Le volume maximal de la brique est égal à 1000 cm^3 c'est-à-dire 1 dm^3 ou 1 litre.

II.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ où a et b sont des réels fixés.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$ en fonction de x, a, b. On donnera le résultat sous forme simplifiée.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\frac{a\times(x^2+1)-(ax+b)\times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{ax^2+a-2ax^2-2bx}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}$$

2°) On sait que la courbe $\mathcal{C}$ possède les propriétés suivantes :

- $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point A d'ordonnée 2 ;
- la tangente au point B de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1 est parallèle à la tangente au point A.

Démontrer que $f(x)=\dfrac{2-x}{x^2+1}$ pour tout réel x.

On sait que $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point A d'ordonnée 2. On a donc $f(0)=2$ (1).

(1) donne $\dfrac{a\times 0+b}{0^2+1}=2$ d'où $b=2$.

On sait que la tangente au point B de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1 est parallèle à la tangente au point A.
On a donc $f'(0)=f'(1)$ (2) (car le coefficient directeur de la tangente en A est égal à $f(0)$ et le coefficient directeur de la tangente en B est égal à $f'(1)$).

On commence par calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.

$$f'(0)=\frac{-a\times 0^2-2b\times 0+a}{(0^2+1)^2}$$

$$=\frac{a}{1}$$

$$=a$$

$$f'(1)=\frac{-a\times 1^2-2b\times 1+a}{(1^2+1)^2}$$

$$=\frac{\cancel{-a}-2b\cancel{+a}}{4}$$

$$=\frac{-b}{2}$$

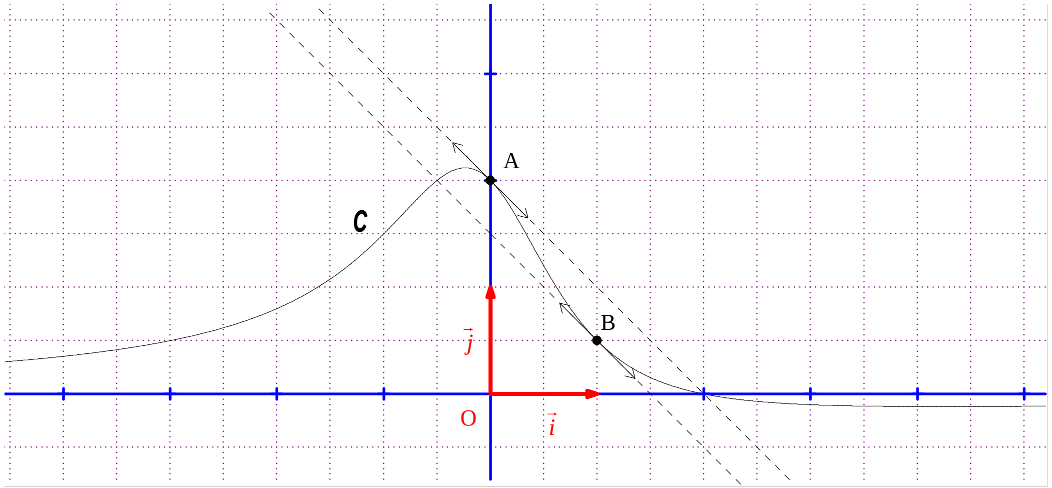
$$=-\frac{2}{2}$$

$$=-1$$

(2) donne $a=-1$.

Comme $a=-1$ et $b=2$, $f(x)=\dfrac{-x+2}{x^2+1}$ soit $f(x)=\dfrac{2-x}{x^2+1}$.

On peut visualiser les tangentes parallèles en A et B sur le graphique ci-dessous.



3°) Faire un tableau comprenant l'étude précise du signe de $f'(x)$ et les variations de f.

On commence par calculer $f'(x)$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\frac{-(x^2+1)-(2-x)\times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{x^2-4x-1}{(x^2+1)^2}$$

On peut faire le calcul indépendamment du 1°) comme ci-dessus ou en utilisant le résultat du 1°) en remplaçant a et b par leurs valeurs respectives.

Le polynôme x^2-4x-1 a pour racines $2-\sqrt{5}$ et $2+\sqrt{5}$ (calculées grâce au discriminant réduit).

x	$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
SGN de x^2-4x-1		$+$	0	$-$	0	$-$	
SGN de $\left(x^2+1\right)^2$		$+$		$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	$\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{2-\sqrt{5}}{2}$	$\nearrow$	

On calcule sans aucune difficulté les extremums locaux.

$$f\left(2-\sqrt{5}\right)=\frac{2-\left(2-\sqrt{5}\right)}{\left(2-\sqrt{5}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{5}}{10-4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\times\left(10+4\sqrt{5}\right)}{\left(10-4\sqrt{5}\right)\left(10+4\sqrt{5}\right)}=\frac{\sqrt{5}\times\left(10+4\sqrt{5}\right)}{100-80}=\frac{\sqrt{5}\times\left(10+4\sqrt{5}\right)}{20}=\frac{10\sqrt{5}+20}{20}=\frac{\sqrt{5}+2}{2}$$

$$f\left(2+\sqrt{5}\right)=\frac{2-\left(2+\sqrt{5}\right)}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2+1}=-\frac{\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}\times\left(10-4\sqrt{5}\right)}{\left(10+4\sqrt{5}\right)\left(10-4\sqrt{5}\right)}=-\frac{\sqrt{5}\times\left(10-4\sqrt{5}\right)}{100-80}=-\frac{\sqrt{5}\times\left(10-4\sqrt{5}\right)}{20}=\frac{20-10\sqrt{5}}{20}=\frac{2-\sqrt{5}}{2}$$

On contrôle les variations en traçant la courbe représentative de f à l'aide de la calculatrice.

4°) Recopier et compléter la phrase suivante sans justifier :

« Les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est horizontale sont égales à ……………… »

Les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est horizontale sont égales à $2-\sqrt{5}$ et $2+\sqrt{5}$.

- On obtient directement ces valeurs grâce au tableau de variations : ce sont les valeurs qui annulent la dérivée.
- Un petit nombre d'élèves a confondu abscisses et ordonnées.

5°) On note E le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse -2 et F le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
Démontrer que la droite (EF) est la tangente en F à $\mathcal{C}$. On répondra avec clarté et concision.

On calcule $f(-2)=\dfrac{4}{5}$. On en déduit que E a pour coordonnées $\left(-2\,;\dfrac{4}{5}\right)$.

On cherche l'abscisse de E.

$f\left(x_{\text{E}}\right)=0$ donc $\dfrac{2-x_{\text{E}}}{\left(x_{\text{E}}\right)^2+1}=0$ d'où $2-x_{\text{E}}=0$.

On en déduit que $x_{\text{E}}=2$ et par suite, E a pour coordonnées $(2\,;0)$.

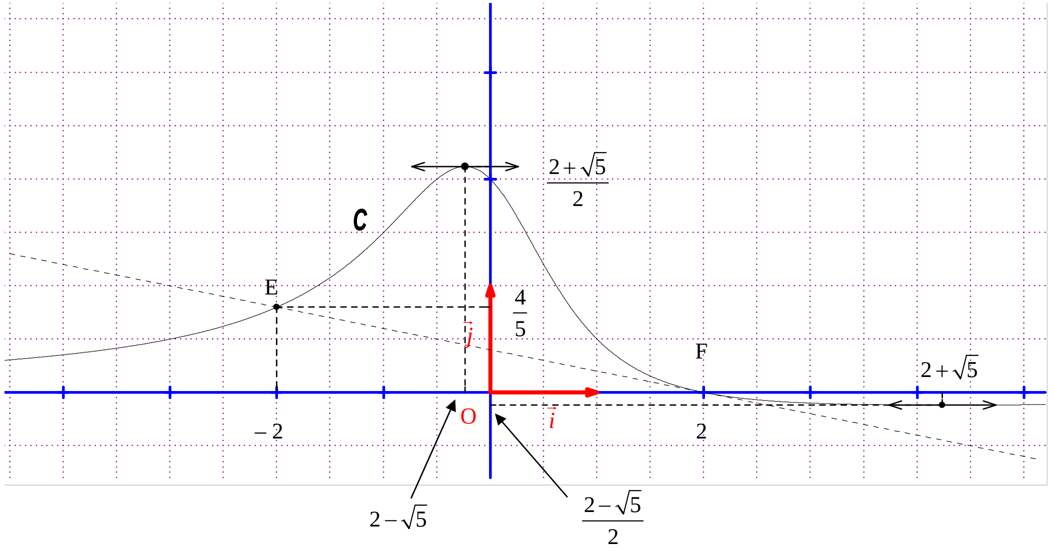
On contrôle ces deux résultats grâce à la calculatrice.

Le coefficient directeur de la droite (EF) est égal à : $\dfrac{y_{\text{F}}-y_{\text{E}}}{x_{\text{F}}-x_{\text{E}}}=\dfrac{\frac{4}{5}}{-4}=-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{5}$.

On calcule ensuite le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en E.

$$f'(2)=\frac{2^2-4\times2-1}{\left(2^2+1\right)^2}=\frac{2^2-4\times2-1}{\left(2^2+1\right)^2}=-\frac{5}{5^2}=-\frac{1}{5}$$

On constate que la tangente à $\mathcal{C}$ en E a le même coefficient directeur que la droite (EF).
Ainsi, on peut affirmer que les deux droites sont confondues.



III.

Les 700 salariés d'une usine sont répartis en deux catégories A et B.
La catégorie A comporte 140 salariés.
Des stages de formation continue sont organisés chaque année tels que :
- chaque salarié participe à un stage au plus ;
- 9 % des salariés partent en stage ;
- 10 % des salariés de la catégorie A partent en stage.

Chaque stage dure 10 jours pour un salarié de catégorie A et 8 jours pour un salarié de catégorie B. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de jours de stage suivis par un salarié de l'usine durant une année.

Il est conseillé de faire un tableau à double entrée sur le modèle suivant :

	Catégorie A	Catégorie B	Total
Fait un stage			
Ne fait pas de stage			
Total			

	Catégorie A	Catégorie B	Total
Fait un stage	14	49	63
Ne fait pas de stage	126	510	637
Total	140	560	700

1°) Recopier et compléter la phrase : « X peut prendre les valeurs : $x_1 = ...$, $x_2 = ...$, $x_3 = ...$ ».
Donner la loi de probabilité de X dans un tableau. On écrira les probabilités sous forme décimale.

X peut prendre les valeurs : $x_1 = 0$, $x_2 = 8$, $x_3 = 10$.

x_i	0	8	10	
$P(X = x_i)$	0,91	0,01	0,08	Total $= 1$

$$P(X=0) = \frac{637}{900}$$
$$= 0{,}91$$

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. On donnera les résultats sous forme décimale.

$$E(X) = 0 \times 0{,}91 + 8 \times 0{,}07 + 10 \times 0{,}02$$
$$= 0{,}76$$

$$V(X) = 0^2 \times 0{,}91 + 8^2 \times 0{,}07 + 10^2 \times 0{,}02 - 0{,}76^2 \quad \text{(formule de Koenig-Huygens)}$$
$$= 5{,}9024$$

IV.

On dispose de trois boules indiscernables au toucher numérotées 1, 2, 3 placées dans une urne et de deux pièces équilibrées A et B. Un jeu consiste à tirer plusieurs fois une boule dans l'urne en la remettant chaque fois dans l'urne.
Après chaque tirage, si l'on obtient la boule portant le numéro 1, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient la boule portant le numéro 2, alors on retourne la pièce B et si l'on on obtient la boule portant le numéro 3, alors on ne retourne aucune des deux pièces. Au début du jeu, les deux pièces sont du côté face.

1°) Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1-a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.
Les variables a, b, n, i, r, s sont des entiers naturels. De plus, la valeur de n saisie en entrée doit être supérieure ou égale à 1.

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0
b prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 1 jusqu'à n **Faire**
    r prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 3 (au sens large)
    Si $r = 1$
        Alors a prend la valeur $1 - a$
    FinSi
    Si $r = 2$
        Alors b prend la valeur $1 - b$
    FinSi
    s prend la valeur $a + b$
FinPour

Sortie :
Afficher s

a) On exécute cet algorithme en saisissant la valeur 3 pour n en entrée et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour r sont 3, 1 et 1.
Quelle est la valeur de s affichée en sortie ?
On pourra recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (ne rien écrire dans le tableau ci-dessous).

variables	i	r	a	b	s
initialisation			0	0	
1er passage dans la boucle Pour					
2e passage dans la boucle Pour					
3e passage dans la boucle Pour					

variables	i	r	a	b	s
initialisation			0	0	
1er passage dans la boucle Pour	1	3	0	0	0
2e passage dans la boucle Pour	2	1	1	0	1
3e passage dans la boucle Pour	3	1	0	0	0

La valeur de s affichée en sortie est 0.

b) Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ? Répondre par oui ou non sans justifier.

Oui

2°) Calculer la probabilité qu'à l'issue de deux tirages de boules dans l'urne les deux pièces soient du côté face.

On note E l'événement : « Les deux pièces sont du côté face à l'issue des deux tirages de boules dans l'urne ».

En deux tirages, il n'y a que 3 façons de trois façons d'obtenir les deux pièces du côté face.
Soit on tire deux fois la boule N°3, et rien ne bouge.
Soit on tire deux fois la boule N°1, et la pièce A est retournée deux fois. Les deux pièces sont donc du côté face.
Soit on tire deux fois la boule N°2 et la pièce B est retournée deux fois. Les deux pièces sont donc du côté face.

E est donc l'événement « On tire deux fois la même boule dans l'urne ».

On regarde dans l'arbre les branches correspondant aux chemins « boule 1 - boule 1 », « boule 2 - boule 2 », « boule 3 - boule 3 ».

On applique chaque fois le principe multiplicatif.

$$P(\mathrm{E}) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$$
$$= 3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{3}$$

3°) Calculer la probabilité qu'à l'issue de trois tirages de boules dans l'urne les deux pièces soient du même côté.

Le plus simple pour résoudre la question est de faire un arbre de probabilités (à trois niveau) et de mettre une croix à droite des chemins qui correspondent à l'événement : « Les pièces sont du même côté ».

1^{er} tirage	2^{e} tirage	3^{e} tirage
1	1	3
1	2	2
1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	2	3
2	3	1
2	3	2
3	1	1
3	1	2
3	2	1
3	2	2
3	3	3

Il y a 13 cas.

La probabilité de chaque résultat est égale à $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$ par principe multiplicatif.

Donc la probabilité cherchée est égale à $\frac{13}{27}$.

4°) On effectue n tirages de boules dans l'urne (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1).
Exprimer en fonction de n la probabilité que l'on ait toujours retourné la même pièce à l'issue des n tirages.
Déterminer le nombre minimal de tirages à effectuer pour que cette probabilité soit strictement inférieure à 10^{-5}.

On a retourné toujours la même pièce dans les deux cas suivants :
1^{er} cas : On a tiré la boule portant le numéro 1 à chaque tirage ;
2^{e} cas : On a tiré la boule portant le numéro 2 à chaque tirage.

Notons F l'événement : « retourner la même pièce à l'issue à chaque tirage », U l'événement : « tirer la boule portant le numéro 1 à chaque tirage » et V l'événement : « tirer la boule portant le numéro 2 à chaque tirage ».

On a : $\mathrm{F}=\mathrm{U}\cup\mathrm{V}$.

Comme les tirages de boules dans l'urne sont des épreuves identiques indépendantes, d'après le principe multiplicatif, on a : $P(\mathrm{U})=\underbrace{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\ldots\times\frac{1}{3}}_{n\text{ facteurs}}=\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1^n}{3^n}=\frac{1}{3^n}$.

De même, on a : $P(\mathrm{V})=\frac{1}{3^n}$.

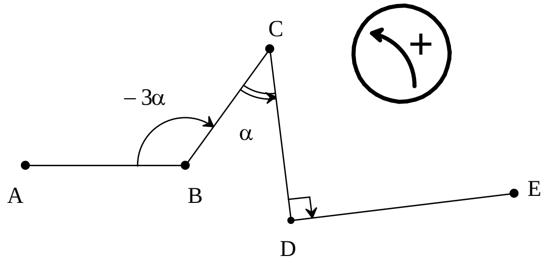
Les événements U et V sont incompatibles donc $P(\mathrm{F})=P(\mathrm{U})+P(\mathrm{V})=2\times\frac{1}{3^n}=\frac{2}{3^n}$.

Pour déterminer le nombre minimal de tirages à effectuer pour que $P(\mathrm{F})<10^{-5}$, on rentre dans la calculatrice la fonction $f : x\mapsto\frac{2}{3^x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on cherche le plus petit entier naturel n tel que $f(n)<10^{-5}$.

On trouve $n=12$.
Il faut effectuer au minimum 12 tirages pour que la probabilité cherchée soit strictement inférieure à 10^{-5}.

V.

Dans le plan orienté, on considère la ligne brisée ABCDE ci-dessous où α est un réel (ne rien écrire sur la figure).
On a : $\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)=-3\alpha$, $\left(\overrightarrow{\mathrm{CB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right)=\alpha$, $\left(\overrightarrow{\mathrm{DC}}\,;\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right)=-\frac{\pi}{2}$.



1°) Recopier et compléter l'égalité : $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right)=(\ldots\ldots;\ldots\ldots)+\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,;\overrightarrow{\mathrm{DC}}\right)+(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$.
En déduire une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right)$ en fonction de α.

$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,;\overrightarrow{\mathrm{DC}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{DC}}\,;\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right)$

$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right)=\left(-\overrightarrow{\mathrm{BA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)+\left(-\overrightarrow{\mathrm{CB}}\,;-\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{DC}}\,;\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right)$

$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)+\pi+\left(\overrightarrow{\mathrm{CB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{DC}}\,;\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right)$

$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right)=-3\alpha+\pi+\alpha-\frac{\pi}{2}$

$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right)=\frac{\pi}{2}-2\alpha$

2°) Déterminer pour quelles valeurs de α les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ sont colinéaires de même sens.
On rédigera selon le modèle suivant à recopier et compléter :

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right)=$ ....
si et seulement si …………………..
si et seulement si …………………..

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right)=2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$
si et seulement si $\frac{\pi}{2}-2\alpha=2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$
si et seulement si $\alpha=\frac{\pi}{4}-k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

VI.

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.
On considère les points $A(1\,;0)$, $B(0\,;1)$, $A'(-1\,;0)$, $B'(0\,;-1)$.

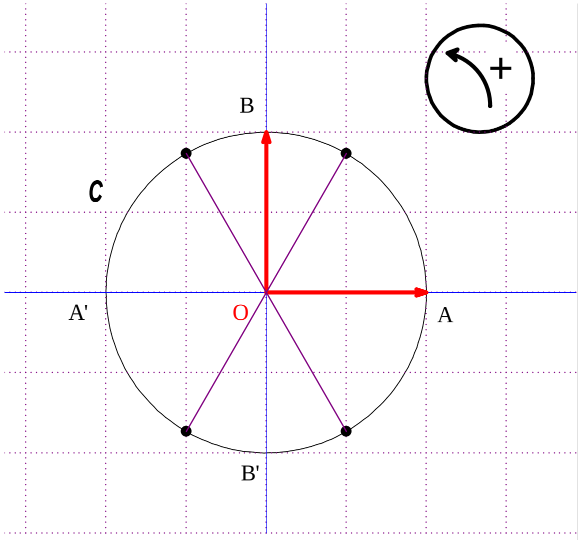
1°) Marquer sur le cercle $\mathcal{C}$ les points E, F, G, H ainsi définis :

$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OE}\right)=-\dfrac{107\pi}{3}$;

$\left(\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OE}\right)=\dfrac{26\pi}{3}$;

$\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OG}\right)=\dfrac{13\pi}{6}$;

$\left(\overrightarrow{OH}\,;\overrightarrow{OA'}\right)=\dfrac{95\pi}{3}$.



$$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OE}\right)=-\frac{107\pi}{3}$$
$$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OE}\right)=-\frac{108\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$$
$$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OE}\right)=\frac{\pi}{3}-36\pi$$
$$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OE}\right)=\frac{\pi}{3}$$

E est donc le point marqué en gras appartenant à l'arc $\overset{\frown}{AB}$

$$\left(\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OE}\right)=\frac{26\pi}{3}$$
$$\left(\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OE}\right)=\frac{2\pi}{3}+\frac{24\pi}{3}$$
$$\left(\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OE}\right)=\frac{2\pi}{3}+8\pi$$
$$\left(\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OE}\right)=\frac{2\pi}{3}+8\pi$$

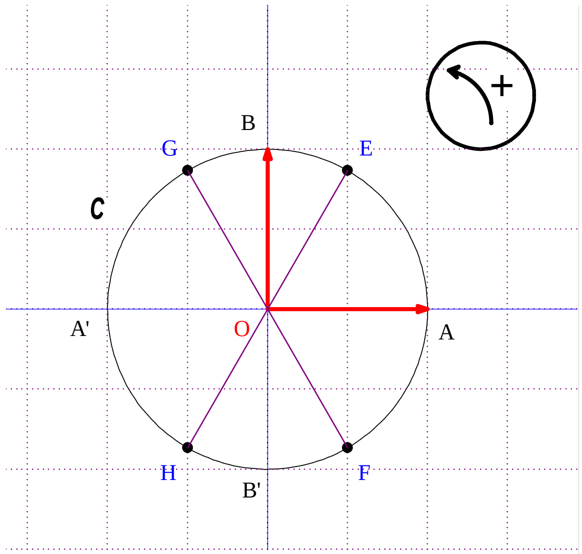
Donc F est le point marqué en gras appartenant à l'arc $\overset{\frown}{AB'}$.

$$\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OG}\right)=\frac{13\pi}{6}$$
$$\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OG}\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{12\pi}{6}$$
$$\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OG}\right)=\frac{\pi}{6}+2\pi$$
$$\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OG}\right)=\frac{\pi}{6}$$

Donc G est le point marqué en gras appartenant à l'arc $\overset{\frown}{A'B}$.

$$\left(\overrightarrow{OH}\,;\overrightarrow{OA'}\right)=\frac{95\pi}{3}$$
$$\left(\overrightarrow{OH}\,;\overrightarrow{OA'}\right)=\frac{96\pi-\pi}{3}$$
$$\left(\overrightarrow{OH}\,;\overrightarrow{OA'}\right)=-\frac{\pi}{3}+32\pi$$
$$\left(\overrightarrow{OH}\,;\overrightarrow{OA'}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

Donc H est le point marqué en gras appartenant à l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$.



2°) Quel est l'ensemble des réels de l'intervalle $[-\pi\,;2\pi]$ dont l'image appartient à l'arc $\overset{\frown}{GH}$ (extrémités comprises) ?

$$\left[-\pi\,;-\frac{2\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}\,;\frac{4\pi}{3}\right]$$