1ère S

Contrôle du jeudi 12 mai 2016 (3 heures)

• Le barème est donné sur 40.

• On répondra directement sur la copie fournie avec le sujet.

• Un certain nombre de questions nécessite une recherche préalable au brouillon. On ne rédigera sur la copie qu'après avoir effectué cette recherche.

• Il est demandé de ne rien écrire sur le sujet et, en particulier, de ne rien marquer sur les figures.

I. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère la suite réelle (u_n) définie sur ℕ par $u_n = \left(2^{n+1}-1\right)^2 - \left(2^{n-1}-1\right)^2$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Démontrer qu'il existe deux réels *a* et *b* (dont donnera les valeurs) tels que pour tout entier naturel *n* on ait $u_n = a\times 4^n + b\times 2^n$. On attend seulement trois lignes de calculs.

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ (on peut écrire $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$).

Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de *n* à l'aide du résultat établi à la question 1°).
On attend seulement trois lignes de calculs.

II. (11 points)

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps. Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.
Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1 (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que chaque minute, 20 % du médicament présent dans le sang à la minute précédente est éliminé.
Pour tout entier naturel *n*, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de *n* minutes.
Ainsi $u_0 = 10$.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On répondra en une phrase en donnant toutes les précisions nécessaires.

2°) Pour tout entier naturel *n*, donner l'expression de u_n en fonction de *n*.

3°) Déterminer à l'aide de la calculatrice au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang deviendra inférieure ou égale à 1 % de la quantité initiale.
On ne demande pas de justifier la réponse.

Partie 2 (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points + 1 point ; 3°) 1 point)

On programme une machine de façon que :
- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute. Pour tout entier naturel *n*, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de *n* minutes.

1°) Justifier que pour tout entier naturel *n*, $w_{n+1} = 0{,}8w_n + 1$. Répondre en une ou deux phrases.

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $z_n = w_n - 5$.
Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n pour *n* entier naturel quelconque. On présentera cinq lignes de calculs.
En déduire que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3°) En déduire l'expression de w_n en fonction de *n*.

Partie 3 (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°) La machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit. Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.
Le tableau ci-dessous donne, arrondie au centième, la quantité restante de médicament minute par minute.

Temps (minutes)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Quantité restante (mL)	10	8	6,4	5,12	8,10	6,48	5,18	8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

2°) On reprend le protocole précédent.
Compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche en sortie la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute *n* (*n* étant un entier naturel tel que $1 \leqslant n \leqslant 15$).

Entrée :
Saisir *n*

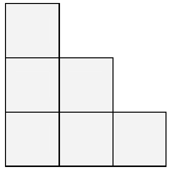
Initialisation :
v prend la valeur 10

Traitement :
Pour *i* variant de 1 à *n* **Faire**
  v prend la valeur ………..
  Si $v < 5$
    Alors *v* prend la valeur ………..
  FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher *v*

3°) On programme à présent la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes. On reprend les 20 % du 1°).
Quelle est alors la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la trentième minute ? On donnera la valeur arrondie au centième.
Quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

III. (3 points)



2016 carrés de chocolat sont positionnés sous forme d'escalier c'est-à-dire 1 chocolat sur la 1ère ligne, 2 chocolats sur la 2e, etc.
Déterminer le nombre de carrés de chocolat n qui sont sur la dernière ligne.
On expliquera brièvement mais le plus clairement possible la démarche.

IV. (6 points : 1°) a) 1 point ; b) 2 points ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point ; c) 1 point)

Une compagnie de transports désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur 40 trajets (2 trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets).
On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p $\left(p \in [0\,;1]\right)$. Un trajet coûte 10 euros. En cas de fraude, l'amende est de 100 euros.
On étudie le cas d'un usager qui fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où cet usager a été contrôlé.

1°) a) Quelle est la loi suivie par X ? Répondre par une phrase en donnant toutes les précisions nécessaires.
b) On suppose dans cette question que $p = 0,05$.

- Calculer la probabilité que le fraudeur soit contrôlé au plus 5 fois. Donner la valeur arrondie au millième.
- Calculer la probabilité que le fraudeur soit contrôlé au moins 2 fois. Donner la valeur arrondie au millième.

2°) Soit Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique en euros réalisé par le fraudeur.
a) Exprimer Y en fonction de X. On rédigera trois lignes de calculs.
b) Calculer l'espérance de Y en fonction de p. On rédigera trois lignes de calculs.
c) Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle strictement positive ?

V. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point ; 3°) a) 1 point ; b) 1 point)

Soit ABCD un parallélogramme. On pose $\text{AB} = a$ et $\text{AD} = b$.

1°) Démontrer que $\overrightarrow{\text{AC}} \bullet \overrightarrow{\text{BD}} = b^2 - a^2$.
Indication : On décomposera les vecteurs $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{BD}}$.

Dans la suite, on note H et K les projetés orthogonaux respectifs des points B et D sur la droite (AC).

2°) Dans cette question, on suppose que $a = 5$, $b = 3$ et $\widehat{\text{BAD}} = 60°$.
a) En écrivant que $\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}}$, calculer AC^2 ; en déduire AC.
b) À l'aide du résultat de la question a), calculer HK (valeur exacte).
3°) Dans cette question, on suppose que ABCD est un rectangle.
a) Démontrer que $\text{HK} = \dfrac{\left|a^2 - b^2\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
b) Démontrer que $\text{HK} = \dfrac{1}{2}\text{AC} \Leftrightarrow a = b\sqrt{3}$ ou $b = a\sqrt{3}$.
On rédigera sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

VI. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 8 et un point A tel que $\text{OA} = 5$.
On considère deux points E et F variables sur le cercle $\mathcal{C}$ tels que le triangle AEF soit rectangle en A. On note M le milieu de [EF].

1°) Démontrer que l'on a : $\text{OM}^2 + \text{AM}^2 = 64$.
Indication : on travaillera dans les triangles OME et AEF.

2°) En utilisant la formule de la médiane dans le triangle OAM, démontrer alors que, lorsque E et F varient sur $\mathcal{C}$, tels que AEF soit rectangle en A, le point M reste sur un cercle fixe Γ que l'on définira.

VII. (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
À tout réel m on associe la courbe $\mathcal{C}_m$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 2x - 2my + 5 = 0$.

Partie 1 (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Dans cette partie, on prend $m = 3$.

1°) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_3$ est un cercle dont on déterminera le centre I et le rayon r.
On rédigera sur le modèle suivant à recopier et compléter.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.
$\text{M} \in \mathcal{C}_3 \Leftrightarrow$ ……………………………………………………………
$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………………
$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………………

2°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_3$ et la droite D d'équation $x + y = 0$.
On rédigera ainsi (modèle à recopier et compléter) :
« Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_3$ et de D sont les solutions de l'équation ……….. »

Partie 2 (2 points : 1°) 2 points ; 2°) bonus)

Dans cette partie, m est quelconque.

1°) Déterminer l'ensemble E des réels m tels que la courbe $\mathcal{C}_m$ soit un cercle.
Pour $m \in E$, préciser les coordonnées du centre Ω_m de $\mathcal{C}_m$.

2°) Déterminer l'ensemble des points Ω_m lorsque m décrit E.

1ère S1

Nom : ……………………

Prénom : …………………

Contrôle du jeudi 12 mai 2016
Copie à rendre

I	II	III	IV	V	VI	VII	Total/40	Total/20

I. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

1°) ……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

2°) ……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

II. (11 points)

Partie 1 (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°) …………………………………………………… (une seule égalité sans justifier)

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) …………………………………………………… (une seule égalité sans justifier)

3°) …………………… (un seul résultat sans faire de phrase)

Partie 2 (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points + 1 point ; 3°) 1 point)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Partie 3 (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°) …………………………………… (un seul résultat sans faire de phrase)

2°)

```
Entrée :
Saisir n

Initialisation :
v prend la valeur 10

Traitement :
 Pour i variant de 1 à n Faire
   |    v prend la valeur ……
   |    Si v < 5
   |    |   Alors v prend la valeur ……..….
   |    FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher v
```

3°) ………………………………………… ; ……………………………………….

III. (3 points)

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (6 points : 1°) a) 1 point ; b) 2 points ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point ; c) 1 point)

1°) a) ……

b) • …………………….. (un seul résultat sans faire de phrase) ; • …………………….. (idem)

2°) a) ……

………

………

b) ………

………

………

c) ………

………

………

V. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point ; 3°) a) 1 point ; b) 1 point)

1°) ……

………

………

2°) a) ……

………

………

………

………

………

………

b) ………

………

………

………

………

3°) a) ……

………

………

………

………

b) ………

………

………

………

………

VI. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) ……

………

………

………

………

………

………

………

………

………

2°) ……

………

………

………

………

………

………

VII.

Partie 1 (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) ……………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………

Partie 2 (2 points : 1°) 2 points ; 2°) bonus)

1°) ……………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 12-5-2016

Ce contrôle a été jugé comme très difficile par l'ensemble des élèves et n'a pas été réussi du tout.

I.

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \left(2^{n+1}-1\right)^2 - \left(2^{n-1}-1\right)^2$ pour tout entier naturel n.

1°) Démontrer qu'il existe deux réels a et b (dont donnera les valeurs) tels que pour tout entier naturel n on ait $u_n = a\times 4^n + b\times 2^n$. On attend seulement trois lignes de calculs.

$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = \left(2^{n+1}-1\right)^2 - \left(2^{n-1}-1\right)^2$

$= \left(2^{n+1}\right)^2 - 2\times 2^{n+1} + 1 - \left[\left(2^{n-1}\right)^2 - 2\times 2^{n-1} + 1\right]$ (identité remarquable)

$= 4^{n+1} - 2\times 2^{n+1} - 4^{n-1} + 2\times 2^{n-1}$ $\quad [\left(2^{n+1}\right)^2 = 2^{2(n+1)} = \left(2^2\right)^{n+1}]$

$= 4^n\times 4 - 2\times 2^n\times 2 - 4^n\times 4^{-1} + 2\times 2^n\times 2^{-1}$

$= 4^n\times 4 - 2\times 2^n\times 2 - 4^n\times\dfrac{1}{4} + 2\times 2^n\times\dfrac{1}{2}$

$= 4^n\times 4 - 4\times 2^n - 4^n\times\dfrac{1}{4} + 2^n$

$= 4^n\times\left(4-\dfrac{1}{4}\right) - 3\times 2^n$

$= 4^n\times\dfrac{15}{4} - 3\times 2^n$

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ (on peut écrire $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$).

Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de n à l'aide du résultat établi à la question 1°).
On attend seulement trois lignes de calculs.

$\forall n\in\mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{k=n}\left(4^k\times\dfrac{15}{4} - 3\times 2^k\right)$

$= \sum_{k=0}^{k=n}\left(4^k\times\dfrac{15}{4}\right) - \sum_{k=0}^{k=n}\left(3\times 2^k\right)$ (on sépare la somme en deux)

$= \dfrac{15}{4}\times\left(\sum_{k=0}^{k=n}4^k\right) - 3\times\left(\sum_{k=0}^{k=n}2^k\right)$ (on peut « sortir » le $\dfrac{15}{4}$ et le 3 de la somme)

$= \dfrac{15}{4}\times\dfrac{4^{n+1}-1}{4-1} - 3\times\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1}$ (on applique la formule du cours $\sum_{k=0}^{k=n}q^k = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ pour $q\neq 1$)

$= \dfrac{15}{4}\times\dfrac{4^{n+1}-1}{3} - 3\times\dfrac{2^{n+1}-1}{1}$

$= \dfrac{5}{4}\times\left(4^{n+1}-1\right) - 3\times\left(2^{n+1}-1\right)$

$= \dfrac{5}{4}\times 4^{n+1} - \dfrac{5}{4} - 3\times 2^{n+1} + 3$

$= 5\times 4^n - 3\times 2^{n+1} + \dfrac{7}{4}$

Commentaires :

- On utilise la formule $\sum_{k=0}^{k=n}q^k = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ pour $q\neq 1$ (formule sommatoire du cours).

- Quel est l'intérêt de sortir le $\dfrac{15}{4}$ et le 3 de chaque somme ? Pourquoi peut-on le faire ?

On a le droit de sortir ces deux facteurs par la propriété de distributivité (il s'agit d'une mise en facteur).
Cela permet d'appliquer facilement la formule de somme que l'on vient de rappeler.

II.

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps. Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.
Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1

On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que chaque minute, 20 % du médicament présent dans le sang à la minute précédente est éliminé.
Pour tout entier naturel *n*, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de *n* minutes.
Ainsi $u_0 = 10$.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On répondra en une phrase en donnant toutes les précisions nécessaires.

Comme 20 % du médicament est éliminé par minute, il en reste 80 % ; prendre 80 % d'un nombre c'est multiplier par 0,8 donc $u_{n+1} = 0,8u_n$.
Donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $u_0 = 10$.

2°) Pour tout entier naturel *n*, donner l'expression de u_n en fonction de *n*.
La suite la suite (u_n) est géométrique donc pour tout n, $u_n = 10 \times 0,8^n$.

3°) Déterminer à l'aide de la calculatrice au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang deviendra inférieure ou égale à 1 % de la quantité initiale.
On ne demande pas de justifier la réponse.

La quantité de médicament dans le sang devient inférieure à 1 % de la quantité initiale à la 21$^{\text{e}}$ minute.

Il y a plusieurs manières de trouver ce résultat.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

On rentre la suite sur la calculatrice.

2$^{\text{e}}$ méthode :

On utilise la commande Rép de la calculatrice.

3$^{\text{e}}$ méthode :

On rentre la fonction $f : x \mapsto 10 \times 0,8^x$ dans la calculatrice.

Partie 2

On programme une machine de façon que :
- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute. Pour tout entier naturel *n*, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de *n* minutes.

1°) Justifier que pour tout entier naturel *n*, $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$. Répondre en une ou deux phrases.

Comme 20 % du médicament est éliminé chaque minute, il en reste 80 % donc on multiplie par 0,8. De plus, toutes les minutes, on rajoute 1 mL. On peut donc dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = 0,8w_n + 1$.

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $z_n = w_n - 5$.
Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n pour *n* entier naturel quelconque. On présentera cinq lignes de calculs.
En déduire que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} &= w_{n+1} - 5 \\ &= 0,8w_n + 1 - 5 \\ &= 0,8w_n - 4 \\ &= 0,8(z_n + 5) - 4 \\ &= 0,8z_n + 4 - 4 \\ &= 0,8z_n\end{aligned}$$

Or à l'instant 0, on injecte 10 mL donc $w_0 = 10$. On a donc $z_0 = 5$. La suite (z_n) est donc géométrique de premier terme $z_0 = 5$ et de raison 0,8.

3°) En déduire l'expression de w_n en fonction de *n*.

D'après les propriétés des suites géométriques, on peut dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = 5 \times 0,8^n$.
Or $w_n = z_n + 5$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = 5 \times 0,8^n + 5$.

Partie 3

1°) La machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit. Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.
Le tableau ci-dessous donne, arrondie au centième, la quantité restante de médicament minute par minute.

Temps (minutes)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Quantité restante (mL)	10	8	6,4	5,12	8,10	6,48	5,18	8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

Les 15 premières minutes, le patient a absorbé 10 mL au début, puis 4 mL les minutes 4, 7, 10 et 13 soit 16 mL ; ce qui fait un total de 26 mL.

2°) On reprend le protocole précédent.
Compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche en sortie la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute *n* (*n* étant un entier naturel tel que $1 \leqslant n \leqslant 15$).

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
v prend la valeur 10

Traitement :
Pour i variant de 1 à n **Faire**
    v prend la valeur $0,8v$
    Si $v<5$
        Alors v prend la valeur $v+4$
    FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher v

3°) On programme à présent la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes. On reprend les 20 % du 1°).
Quelle est alors la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la trentième minute ? On donnera la valeur arrondie au centième.
Quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

Il y a deux méthodes pour répondre à la question.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

On dresse un tableau comme celui qui a été donné dans l'énoncé. C'est un peu long et fastidieux.
Sur la deuxième ligne, on donne les affichages obtenus à l'aide de la calculatrice.

Temps (minutes)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quantité restante (mL)	10	8	6,4	7,12	7,696	6,1568	6,92544	7,540352	6,0322816	6,82582528

Temps (minutes)	10	11	12	13	14	15	16
Quantité restante (mL)	7,460660224	7,968528179	6,374822543	7,099858035	7,679886428	6,143909142	6,915127314

Temps (minutes)	17	18	19	20	21	22	23
Quantité restante (mL)	7,532101851	6,025681481	6,820545185	7,456436148	7,965148918	6,372119135	7,097695308

Temps (minutes)	24	25	26	27	28	29	30
Quantité restante (mL)	7,678156246	6,142524997	6,914019998	7,531215998	6,024972798	6,819978239	7,455982591

La quantité de médicament restant dans le sang à la trentième minute est environ égale à 7,46 mL.
La quantité totale de médicament injectée dans l'organisme est de 50 mL (10 mL au départ + 20 injections de 2 mL).

2$^{\text{e}}$ méthode :

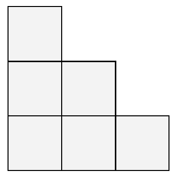
On réalise un programme sur la calculatrice.

Programme sur TI pour résoudre la question 3°) :

```
: Prompt N
: 10 → V
: 0 → A
: For (I,1,N)
: V ∗ 0,8 → V
:  V < 6
: Then
:  V + 2 → V
: 1+A → A
: End
: End
: Disp V
: Disp A
```

III.

2016 carrés de chocolat sont positionnés sous forme d'escalier c'est-à-dire 1 chocolat sur la 1$^{\text{ère}}$ ligne, 2 chocolats sur la 2$^{\text{e}}$, etc.
Déterminer le nombre de chocolat n qui sont sur la dernière ligne.
On expliquera brièvement mais le plus clairement possible la démarche.



Le nombre n désigne le nombre de carrés de chocolat présents sur la dernière ligne.
Le nombre total de carrés de chocolat est égal à $1+2+...+n$.

On sait par une formule du cours sur les suites arithmétiques que $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

On a donc $\dfrac{n(n+1)}{2}=2016 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow n(n+1)=4032$

$\Leftrightarrow n^2+n-4032=0$

Les racines du polynôme $x^2+x-4032$ sont 63 et – 64.

Or $n\in\mathbb{N}^*$ donc $n=63$.

Un élève (Jean Louette) a trouvé la réponse en utilisant un programme sur sa calculatrice ave une boucle.

Algorithme rédigé en langage naturel

Initialisations :
X prend la valeur 0
V prend la valeur 0

Traitement :
Tantque V est différent de 2016 **Faire**
    X prend la valeur $X+1$
    V prend la valeur $X+V$
    Afficher V
FinTantque

Sortie :
Afficher X

Programme sur calculatrice TI

```
: 0 → X
: 0→ V
: While V ≠ 2016
:  X+1 → X
:  X+V → V
: Disp V
: End
: Disp X
```

Autres méthodes :

→ Utilisation de la commande « Rép » de la calculatrice

→ Méthode par les aires (faite par un élève)

IV.

Une compagnie de transports désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur 40 trajets (2 trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets).
On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p $\left(p\in[0\,;1]\right)$. Un trajet coûte 10 euros. En cas de fraude, l'amende est de 100 euros.
On étudie le cas d'un usager qui fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où cet usager a été contrôlé.

1°) a) Quelle est la loi suivie par X ? Répondre par une phrase en donnant toutes les précisions nécessaires.

X suit la loi binomiale de paramètres $n=40$ et p.

b) On suppose dans cette question que $p=0,05$.

• Calculer la probabilité que le fraudeur soit contrôlé au plus 5 fois. Donner la valeur arrondie au millième.

0,986

On cherche $P(X\leqslant 5)$.

Avec la calculatrice [binomFRép(40,0.05,5)], on trouve : $P(X\leqslant 5)=0{,}986123050...$

• Calculer la probabilité que le fraudeur soit contrôlé au moins 2 fois. Donner la valeur arrondie au millième.

0,601

On cherche $P(X\geqslant 2)=1-P(X\leqslant 1)$

$P(X\geqslant 2)=1-P(X\leqslant 1)$

Avec la calculatrice [1 – binomFRép(40,0.05,1)], on trouve $P(X\geqslant 2)=0{,}600935934...$.

2°) Soit Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique en euros réalisé par le fraudeur.
a) Exprimer Y en fonction de X. On rédigera trois lignes de calculs.

À chaque fois qu'il voyage sans payer, le fraudeur gagne le prix du billet non dépensé, soit 10 €. Fraudant 40 fois par mois, il gagne ainsi 400 €.
Ce gain se trouve diminué du nombre X de fois où se faisant contrôler, il doit payer l'amende de 100 €, soit 100X.

Y = coût des 40 trajets – coût des amendes

coût des 40 trajets est égal à 40×10

coût des amendes = prix de l'amende × nombre de contrôles

$Y=10\times 40-100X$

$=400-100X$

b) Calculer l'espérance de Y en fonction de p. On rédigera trois lignes de calculs.

$$\begin{aligned} E(Y) &= 400 - 100E(X) \\ &= 400 - 100 \times 40p \quad \text{(formule de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale)} \\ &= 400 - 4000p \end{aligned}$$

c) Pour quelles valeurs de p cette espérance est-elle strictement positive ?

On cherche p tel que $E(Y) > 0 \quad (1)$.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 400 - 4000p > 0 \\ &\Leftrightarrow p < \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Un certain nombre d'élèves n'a par écrit de liens logiques entre les égalités.

V.

Soit ABCD un parallélogramme. On pose $AB = a$ et $AD = b$.

1°) Démontrer que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = b^2 - a^2$.

Indication : On décomposera les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

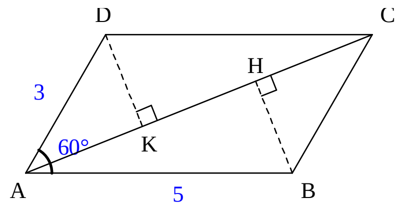
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (règle du parallélogramme)

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ (relation de Chasles sous forme soustractive)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2 \quad \text{(On applique l'identité remarquable scalaire } \left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} - \vec{v}\right)\text{)} \\ &= AD^2 - AB^2 \quad \text{(En effet, } \overrightarrow{AD}^2 = AD^2 \text{ et } \overrightarrow{AB}^2 = AB^2\text{)} \\ &= b^2 - a^2 \end{aligned}$$

Dans la suite, on note H et K les projetés orthogonaux respectifs des points B et D sur la droite (AC).

2°) Dans cette question, on suppose que $a = 5$, $b = 3$ et $\widehat{BAD} = 60°$.



a) En écrivant que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, calculer AC^2 ; en déduire AC.

$$\begin{aligned} AC^2 &= \overrightarrow{AC}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 \\ &= \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 \quad \text{(identité remarquable scalaire)} \\ &= AB^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + AD^2 \\ &= 5^2 + 2 \times 5 \times 3 \times \cos 60° + 3^2 \\ &= 25 + 2 \times 5 \times 3 \times \frac{1}{2} + 9 \\ &= 25 + \cancel{2} \times 5 \times 3 \times \frac{1}{\cancel{2}} + 9 \\ &= 25 + 15 + 9 \\ &= 49 \end{aligned}$$

Donc $AC = \sqrt{49} = 7$.

On peut vérifier ce résultat géométriquement en faisant une figure très soignée et en mesurant la longueur du segment $[AC]$ à la règle graduée.

Autre méthode sans tenir compte de l'indication :

On applique la « formule du côté » (ou formule d'Al Kashi) dans le triangle ABC.

b) À l'aide du résultat de la question a), calculer HK (valeur exacte).

D'une part, d'après le résultat de la question 1°) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= 3^2 - 5^2 \\ &= 9 - 25 \\ &= -16 \end{aligned}$$

D'autre part, d'après la propriété des projetés orthogonaux :

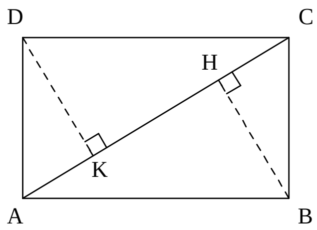
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HK} \\ &= -AC \times HK \quad \text{car } \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{HK} \text{ sont colinéaires de sens contraire.} \end{aligned}$$

D'où $-16 = -7 \times HK$.

On en déduit que $HK = \frac{16}{7}$.

On peut vérifier ce résultat géométriquement en faisant une figure très soignée et en mesurant la longueur du segment $[\mathrm{HK}]$ à la règle graduée.

3°) Dans cette question, on suppose que ABCD est un rectangle.



a) Démontrer que $\mathrm{HK}=\dfrac{\left|a^2-b^2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

D'autre part, d'après la propriété des projetés orthogonaux :

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{HK}}$

Donc $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\mathrm{AC}\times\mathrm{HK}$ si $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ sont de même sens

et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BD}}=-\,\mathrm{AC}\times\mathrm{HK}$ si $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ sont colinéaires de sens contraires.

Il faudrait théoriquement étudier le cas où $\mathrm{H}=\mathrm{K}$. Dans ce cas, $\overrightarrow{\mathrm{HK}}=\vec{0}$ et le résultat subsiste.

On en déduit, d'après les deux cas précédents, que $\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|=\mathrm{AC}\times\mathrm{HK}$.

Or $\mathrm{AC}=\sqrt{a^2+b^2}$ (d'après le théorème de Pythagore).

Donc $\left|b^2-a^2\right|=\sqrt{a^2+b^2}\times\mathrm{HK}$.

Or $\left|b^2-a^2\right|=\left|a^2-b^2\right|$.

Par suite, $\left|a^2-b^2\right|=\sqrt{a^2+b^2}\times\mathrm{HK}$.

On en déduit que $\mathrm{HK}=\dfrac{\left|a^2-b^2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

b) Démontrer que $\mathrm{HK}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\Leftrightarrow a=b\sqrt{3}$ ou $b=a\sqrt{3}$.

On rédigera sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

$$\mathrm{HK}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\Leftrightarrow\frac{\left|a^2-b^2\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow\left|a^2-b^2\right|=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2-b^2=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)\text{ ou }a^2-b^2=-\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2-2b^2=a^2+b^2\text{ ou }2a^2-2b^2=-a^2-b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2=3b^2\text{ ou }b^2=3a^2$$

$$\Leftrightarrow a=b\sqrt{3}\text{ ou }b=a\sqrt{3}\quad\text{(car } a \text{ et } b \text{ sont tous les deux des réels positifs)}$$

VI.

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 8 et un point A tel que $\mathrm{OA}=5$.

On considère deux points E et F variables sur le cercle $\mathcal{C}$ tels que le triangle AEF soit rectangle en A. On note M le milieu de [EF].

1°) Démontrer que l'on a : $\mathrm{OM}^2+\mathrm{AM}^2=64$.

Indication : on travaillera dans les triangles OME et AEF.

$\mathrm{OE}=\mathrm{OF}=8$ donc le triangle OEF est isocèle en O.

Omme M est le milieu de [EF], on en déduit que (OM) $\perp$ (EF).

Le triangle OME est rectangle en M donc d'après le théorème de Pythagore,

$\mathrm{OM}^2+\mathrm{ME}^2=\mathrm{OE}^2$ soit $\mathrm{OM}^2+\mathrm{ME}^2=64\quad(1)$.

Le triangle AEF est rectangle en A donc $\mathrm{MA}=\mathrm{ME}=\mathrm{MF}$.

Par suite, (1) donne $\mathrm{OM}^2+\mathrm{AM}^2=64\ (2)$.

2°) En utilisant la formule de la médiane dans le triangle OAM, démontrer alors que, lorsque E et F varient sur $\mathcal{C}$, tels que AEF soit rectangle en A, le point M reste sur un cercle fixe Γ que l'on définira.

On note I le milieu de [OA].

On a : $\mathrm{OM}^2+\mathrm{AM}^2=2\mathrm{MI}^2+\dfrac{\mathrm{OA}^2}{2}$ soit $\mathrm{OM}^2+\mathrm{AM}^2=2\mathrm{MI}^2+\dfrac{25}{2}$ (car $\mathrm{OA}=5$).

L'égalité (2) donne donc $2\mathrm{MI}^2+\dfrac{25}{2}=64$ doit $\mathrm{MI}^2=\dfrac{103}{4}$.

On en déduit que $\mathrm{MI}=\dfrac{\sqrt{103}}{2}$.

Par suite, M appartient au cercle Γ de centre I et de rayon $\dfrac{\sqrt{103}}{2}$.

Dans cet exercice, le plan n'est pas muni d'un repère orthonormé. Il n'était donc pas possible d'utiliser les coordonnées du point M comme je l'ai trouvé dans quelques copies.

VII.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

À tout réel m on associe la courbe $\mathcal{C}_m$ d'équation cartésienne $x^2+y^2+2x-2my+5=0$.

Partie 1

Dans cette partie, on prend $m=3$.

1°) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_3$ est un cercle dont on déterminera le centre I et le rayon r.
On rédigera sur le modèle suivant à recopier et compléter.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\text{M}\in\mathcal{C}_3 \Leftrightarrow$ ……………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………………

$\mathcal{C}_3$ a pour équation cartésienne $x^2+y^2+2x-6y+5=0$.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$$\text{M}\in\mathcal{C}_3 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-6y+5=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2-1+(y-3)^2-9+5=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=5$$

$\mathcal{C}_3$ est donc le cercle de centre $\text{I}(-1\,;3)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

2°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_3$ et la droite D d'équation $x+y=0$.
On rédigera ainsi (modèle à recopier et compléter) :
« Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_3$ et de D sont les solutions de l'équation ………. »

D a pour équation $y=-x$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_3$ et de D sont les solutions de l'équation

$x^2+(-x)^2+2x-6\times(-x)+5=0 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow x^2+x^2+2x+6x+5=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+8x+5=0 \quad (1')$$

Le discriminant réduit de $(1')$ est donné par $\Delta'=6$.

$\Delta'>0$ donc $(1')$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{-4+\sqrt{6}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-4-\sqrt{6}}{2}$.

Les abscisses des oints d'intersection de $\mathcal{C}_3$ et de D sont donc égales à $\dfrac{-4+\sqrt{6}}{2}$ et $\dfrac{-4-\sqrt{6}}{2}$.

Partie 2

Dans cette partie, m est quelconque.

1°) Déterminer l'ensemble E des réels m tels que la courbe $\mathcal{C}_m$ soit un cercle.
Pour $m\in E$, préciser les coordonnées du centre Ω_m de $\mathcal{C}_m$.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$$\text{M}\in\mathcal{C}_m \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-2my+5=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2-1+(y-m)^2-m^2+5=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-m)^2=m^2-4$$

$\mathcal{C}_m$ est un cercle $\Leftrightarrow m^2-4>0$

$\Leftrightarrow m<-2$ ou $m>2$

L'ensemble E des réels m tels que la courbe $\mathcal{C}_m$ soit un cercle est $]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[$.

Pour $m\in E$, le centre Ω_m de $\mathcal{C}_m$ a pour coordonnées $(-1\,;m)$.

2°) Déterminer l'ensemble des points Ω_m lorsque m décrit E.

$x_{\Omega_m}=-1$ donc Ω_m appartient à la droite d'équation $x=-1$.

De plus, $y_{\Omega_m}=m$.

Par conséquent, lorsque m décrit E, Ω_m décrit la réunion des demi-droites définies par les systèmes $\begin{cases}x=-1\\y<-2\end{cases}$ et $\begin{cases}x=-1\\y>2\end{cases}$.

Il est conseillé de faire un graphique pour bien comprendre.