Correction devoir commun n° 1 de Mathématiques. Première S – Novembre 2013-2014

EXERCICE 1 :

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Soit le trinôme du second degré $a\,x^2+bx+c$. On suppose que son discriminant Δ est strictement positif.

a) Si Δ > 0 alors on 2 racines distinctes x_1 et x_2

S = $x_1+x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-b-b}{2a}=\dfrac{-2b}{2a}=\dfrac{-b}{a}$

P = $x_1\times x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\times\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{b^2-b\sqrt{\Delta}+b\sqrt{\Delta}-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\dfrac{b^2-\Delta}{4a^2}=\dfrac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$

$=\dfrac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\dfrac{4ac}{4a^2}=\dfrac{4a\times c}{4a\times a}=\dfrac{c}{a}$

b) Application 1:

On remarque que a > 0 et c < 0 donc – 4ac > 0 (règle des signes dans un produit)et donc Δ > 0 donc il y a 2 racines
on remarque que 1 est une racine évidente (faire le test en remplaçant x par 1) . Posons $x_1=1$
Or P = $\dfrac{c}{a}$ donc $x_1\times x_2=1\times x_2=\dfrac{-5}{2}$ donc $x_2=\dfrac{-5}{2}$. Paul a ainsi trouvé les deux racines de l'équation.

c) Application 2

C=-2013 < 0 et a = 15 > 0 donc – 4ac > 0 (règle des signes dans un produit) et donc Δ > 0 donc il y a 2 racines
De plus le produit des racines $P=x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-2013}{15}$ est négatif (un négatif divisé par un positif) , donc les racines sont de signes contraires

Partie B: Vrai- Faux ? Justifier

1) Le vecteur $\vec{u}(1;\sqrt{3}-1)$ est-il un vecteur directeur de la droite d'équation $2x-(1+\sqrt{3})y-8=0$?

Ne pas oublier qu'une droite a une infinité de vecteurs directeurs tous colinéaires entre eux!!!!

un vecteur directeur de la droite est $\vec{v}$ $(1+\sqrt{3};2)$ (forme $(-b;a)$)

Donc $\vec{u}$ sera aussi un vecteur directeur de la droite si il est colinéaire à $\vec{v}$
On vérifie le critère de colinéarité : $1\times 2-(\sqrt{3}-1)(1+\sqrt{3})=2-(3-1)=2-2=0$
Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc l'affirmation est vraie

2) On considère une série statistique comportant 20 valeurs identiques égales à 32 et 20 valeurs identiques égales à 48.

$$moyenne=\frac{20\times 32+20\times 48}{40}=\frac{1600}{40}=40$$

$$écart-type=\sqrt{\frac{20\times(32-40)^2+20\times(48-40)^2}{40}}=\sqrt{64}=8$$

donc l'affirmation est vraie

EXERCICE 2 : (4 points) Position relative de deux courbes

On considère la courbe C_1 représentative de la fonction définie sur ℝ par $f(x)=x^2+2x$ et la courbe C_2 représentative de la fonction définie sur ℝ par $g(x)=mx^2-1$ où m est un paramètre réel.
Un point $M(x;y)$ sera un point d'intersection de C_1 et de C_2 si les coordonnées de M vérifient $y=f(x)$ et aussi $y=g(x)$ donc si $f(x)=g(x)$

On va résoudre $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+2x=mx^2-1 \Leftrightarrow (1-m)x^2+2x+1=0$

Premier cas : $m=1$, on obtient une équation du premier degré et on résout $2x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{2}$, on calcule $f\left(\frac{-1}{2}\right)=g\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{4}-1=\frac{-3}{4}$ donc le point d'intersection(unique) I a pour coordonnées $\mathrm{I}\left(\frac{-1}{2};-\frac{3}{4}\right)$

Deuxième cas $m\neq 1$ et **on résout une équation du second degré**

$\Delta=2^2-4\times(1-m)\times 1=4-4+4m=4m$
D'où la discussion :

Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ $4m>0 \Leftrightarrow m>0$ il y a 2 solutions donc 2 points d'intersection
Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ $4m=0 \Leftrightarrow m=0$ il y a une solution donc un point d'intersection
Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ $4m<0 \Leftrightarrow m<0$ il n'y a pas de solution donc aucun point d'intersection

<u>**Conclusion**</u>

Si $m=0$ ou si $m=1$ il y a un point d'intersection
Si $m\in]0;1[\cup]1;+\infty[$ il y a deux points d'intersection
Si $m\in]-\infty;0[$ pas de point d'intersection

EXERCICE 3 : (5 points)

1) Calculer la moyenne et l'écart-type de chacune des deux séries. (Menu STAT autorisé)
Soyez attentif au réglage de votre calculatrice !!

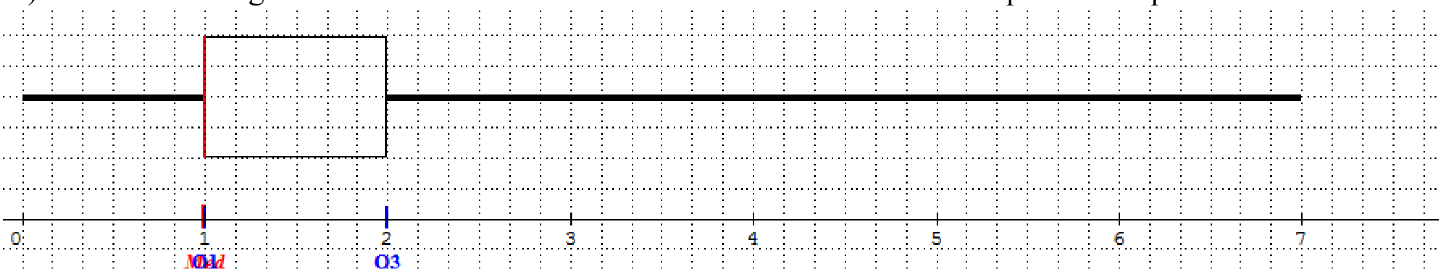
La moyenne $\overline{x_A}=1,5$ et $\overline{x_B}=1,5$
L'écart-type $\sigma_A \approx 1,14$ et $\sigma_B \approx 1,68$

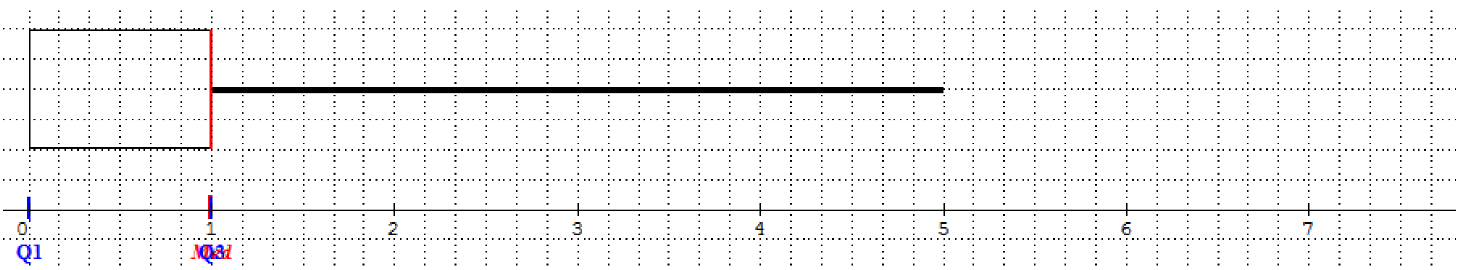
2) Déterminer la médiane, les quartiles et l'écart interquartile de chacune des deux séries.

Pour la chaîne A avec la calculatrice : $m_e=1$ $Q_1=1$ et $Q_3=2$ donc écart interquartile = Q_3-Q_1 = 2-1=1

Pour la chaîne B :La médiane de la série rangée dans l'ordre croissant est la valeur qui partage cette série en 2 séries de même effectif : $\frac{100}{2}=50$ donc la médiane est comprise entre la 50^{ieme} et $51^{ième}$ valeur de la série, ces deux valeurs sont égales à 1 donc $\frac{1+1}{2}=1=m_e$
Le quartile 1 est la plus petite valeur de la série rangée dans l'ordre croissant telle qu au moins 25 % des valeurs lui sont inférieures ou égale : 25 % de 100 = $\frac{1}{4}\times 100=25$ donc Q_1 est la $25^{ième}$ valeur : c'est 0 ; $Q_1=0$
Le quartile 3 est la plus petite valeur de la série rangée dans l'ordre croissant telle qu au moins 75 % des valeurs lui sont inférieures ou égale : 75 % de 100 = $\frac{3}{4}\times 100=75$ donc Q_3 est la $75^{ième}$ valeur : c'est 1 ; $Q_3=1$
Donc écart interquartile = Q_3-Q_1 = 1 – 0 = 1

3) Quelle est, à votre avis, la chaîne la plus performante ?
Il n'est pas facile de comparer ces deux séries avec moyenne et écart-type car les résultats sont proches.
Les médianes sont égales ainsi que les écarts interquartiles. Un élément déterminant semble être Q_3 ce qui va être confirmé avec les diagrammes en boîte ci dessous
4) Dessiner les diagrammes en boite des deux séries. Maintenez-vous votre réponse à la question 3 ?





En visualisant la position des « boites » des 2 diagrammes en boites , la chaîne B semble plus performante.
En effet :
Pour la chaîne B , au moins 75 % des valeurs sont inférieures à 1 avec au moins 25 % des valeurs égales à 0 alors que pour la chaine A au moins 50 % des valeurs sont comprises entre 1 et 2.
Il faudrait faire d'autres vérifications pour confirmer cette impression.

EXERCICE 4 : (5 points). Points alignés

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ on a

$A(0;0); B(1;0); C(0;1) \text{ et } D\left(0;\frac{2}{5}\right)$

a) Montrer que les coordonnées du point E sont $\left(\frac{3}{5};\frac{2}{5}\right)$

On utilise la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}$ pour déterminer l'ordonnée de E :
$\overrightarrow{DE}(x_E-0\,;y_E-\frac{2}{5})$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}(1\,;0)$ donne $y_E=\frac{2}{5}$.
On utilise la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$ pour déterminer l'abscisse de E :

$\overrightarrow{BE}(x_E-1\,;y_E)$ colinéaire à $\overrightarrow{BC}(-1\,;1)$ donne $x_E-1+\frac{2}{5}=0$ d'où $x_E=\frac{3}{5}$
Autre méthode : On peut aussi déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) (voir méthode dans le cours) et on trouve $x+y-1=0$. Les coordonnées de E vérifient cette équation : $x_E+\frac{2}{5}-1=0$ donc $x_E=\frac{3}{5}$
Donc $E\left(\frac{3}{5};\frac{2}{5}\right)$
b) Montrer que les coordonnées du point F sont $\left(\frac{3}{8};\frac{1}{4}\right)$
Le point F est le point d'intersection des droites (AE) et (BD).
Par une des méthodes du cours on trouve
(AE) : $\frac{-2}{5}x+\frac{3}{5}y=0$ que l'on peut simplifier en multipliant chaque membre par 5 : $-2x+3y=0$
et (BD) : $\frac{2}{5}x+y-\frac{2}{5}=0$

On résout donc le système suivant pour déterminer les coordonnées de F

$\begin{cases}-2x+3y=0\\ \frac{2}{5}x+y-\frac{2}{5}=0\end{cases}$ et on trouve $F\left(\frac{3}{8};\frac{1}{4}\right)$

c) Déduire des questions précédentes que les points C, F et I sont alignés .

Les points C, F et I sont alignés équivaut à les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires
On calcule les coordonnées du point $I(\frac{1}{2};0)$ milieu de [AB] et des vecteurs $\overrightarrow{CF}\left(\frac{3}{8};-\frac{3}{4}\right)$ et $\overrightarrow{CI}\left(\frac{1}{2};-1\right)$

Le critère de colinéarité est vérifié car $\frac{3}{8}\times(-1)-\left(\frac{-3}{4}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{-3}{8}+\frac{3}{8}=0$

Donc C, F et I sont alignés.