EXERCICE 1 :

1. Voir annexe.
2. $\boxed{\text{Un employé peut composer } 3 \times 2 \times 2 = 12 \text{ repas}}$.
3. Les repas sont tous équiprobables, on utilise donc la formule $p(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$, le nombre de cas favorables étant lus sur l'arbre. D'où $\boxed{p(A) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}\,;\, p(B) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}}$.

   $A \cap B$ est l'évènement : « le repas contient le plat de poisson et de la quiche » donc $\boxed{p(A \cap B) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}}$.

   On en déduit $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. $\boxed{p(A \cup B) = \dfrac{2}{3}}$.
4. Voir annexe.
5. (a) $\boxed{\text{La variable aléatoire } R \text{ peut prendre les valeurs } \{1000\,;\ 1100\,;\ 1200\,;\ 1300\,;\ 1400\,;\ 1500\,;\ 1600\}}$.

   (b) La loi de probabilté de la variable aléatoire R est donné par le tableau :

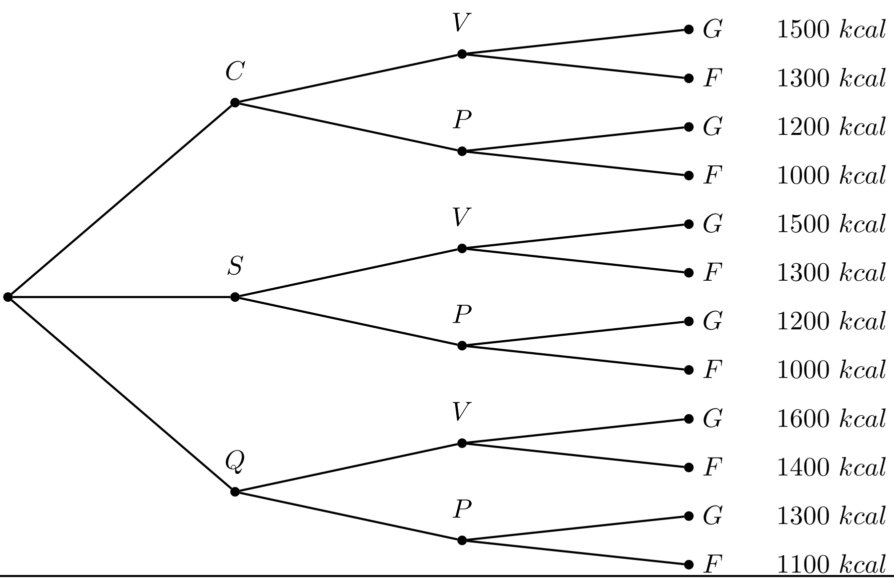
$R = x_i$	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600
$p(R = x_i) = p_i$	$\dfrac{2}{12}$	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{2}{12}$	$\dfrac{3}{12}$	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{2}{12}$	$\dfrac{1}{12}$

   (c) Sur un grand nombre de repas, le bilan calorique moyen correspond à l'espérance $E(R)$.

   $E(R) = 1000 \times \dfrac{2}{12} + 1100 \times \dfrac{1}{12} + 1200 \times \dfrac{2}{12} + 1300 \times \dfrac{3}{12} + 1400 \times \dfrac{1}{12} + 1500 \times \dfrac{2}{12} + 1600 \times \dfrac{1}{12}$

   Soit $E(R) = \dfrac{15\,400}{12} = \dfrac{3850}{3} \approx 1283.33$. $\boxed{\text{Le bilan calorique moyen d'un repas est 1283.33 kcal}}$.

Annexe :



EXERCICE 2 :

1. Proposition 1 : $\boxed{\text{FAUX}}$. f' est de la forme $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ en posant $\begin{cases} u(x) = x^2 - 2x \\ v(x) = x + 2 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = 2x - 2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

   Pour tout $x \neq -2$, $f'(x) = \dfrac{(2x-2)(x+2) - \left(x^2 - 2x\right) \times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x + 4x - 4 - x^2 + 2x}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2 + 4x - 4}{(x+2)^2}$.
2. Proposition 2 : $\boxed{\text{FAUX}}$. $2\cos(x) + 1 = 0 \iff 2\cos(x) = -1 \iff \cos(x) = -\dfrac{1}{2}$.

   Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont donc de la forme $\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. (a) Proposition 3 : $\boxed{\text{VRAI}}$. De $A(-1\,;\ 5)$, $B(-3\,;\ 8)$, $C(4\,;\ -2)$, $D(8\,;\ -8)$ on tire $\overrightarrow{AB}(-2\,;\ 3)$ et $\overrightarrow{CD}(4\,;\ -6)$. On a donc $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

(b) Proposition 4 : $\boxed{\text{FAUX}}$. $E\left(0\ ;\ \dfrac{7}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{CE}\left(-4\ ;\ \dfrac{11}{2}\right)$; les vecteurs $\overrightarrow{CD}\,(4\ ;\ -6)$ et $\overrightarrow{CE}$ ne sont pas colinéaires, donc les points C, D et E ne sont pas alignés, donc $E \notin (CD)$.

(c) Proposition 5 : $\boxed{\text{FAUX}}$. $D\,(8\ ;\ -8)$ et $9\times 8 - 13\times(-8) + 74 = 72 + 104 + 74 = 250 \neq 0$ donc D n'appartient pas à la droite d'équation $9x - 13y + 74 = 0$.

4. Proposition 6 : $\boxed{\text{FAUX}}$. $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BD}$ donc B n'est pas le milieu de $[AD]$.

5. Proposition 7 : $\boxed{\text{VRAI}}$. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) + (-\cos(x)) + \cos(x) = \cos(x)$.

EXERCICE 3 :

1. $u_1 = 1500 - 1500 \times \dfrac{20}{100} + 50 = 1500 \times 0.8 + 50 = 1250$. $\boxed{u_1 = 1250}$.

2. Une diminution de 20% de la surface engazonnée se traduit par une multiplication par $1 - \dfrac{20}{100} = 0.8$.
Pour obtenir la surface engazonnée u_{n+1} de l'année $n+1$, on multiplie donc la surface engazonnée u_n de l'année n par 0.8 auquel on rajoute les 50 m^2 de nouveau gazon. Donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0.8u_n + 50}$.

3. (a) On sait que $v_n = u_n - 250$ donc $u_n = v_n + 250$. Pour tout entier naturel n :
$v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 0.8u_n + 50 - 250 = 0.8\,(v_n + 250) - 200 = 0.8v_n + 0.8\times 250 - 200 = 0.8v_n$.
$\boxed{(v_n) \text{ est donc une suite géométrique de raison } q = 0.8 \text{ et de premier terme } v_0 = u_0 - 250 = 1500 - 250 = 1250}$.

(b) Pour tout entier naturel n, $\boxed{v_n = v_0 \times q^n = 1250 \times 0.8^n}$.

(c) Pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n = v_n + 250 = 1250 \times 0.8^n + 250}$.

(d) $u_4 = 1250 \times 0.8^4 + 250 = 762$. $\boxed{\text{Au bout de quatre années, la surface engazonnée est de 762 m}^2}$.

4. Tant que $\boxed{u > 500}$ faire
 u prend la valeur $\boxed{0.8 \times u + 50}$
 n prend la valeur $\boxed{n+1}$

EXERCICE 4 :
PARTIE A

1. Pour tout réel x, $\boxed{g'(x) = 2ax + b}$.

2. On lit : $\boxed{g(0) = 3\,;\ g(1) = 3\,;\ g'(1) = \dfrac{-4}{1} = -4}$ $g'(1)$ étant le coefficient directeur de la tangente (T).

3. $g(0) = 3 \iff c = 3$ et $\left\{\begin{array}{l} g(1) = 3 \\ g'(1) = -4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a+b+c = 3 \\ 2a+b = -4 \end{array}\right.$ d'où $\boxed{c = 3 \text{ et } \left\{\begin{array}{l} a+b = 0 \\ 2a+b = -4 \end{array}\right.}$

4. $\left\{\begin{array}{l} a+b = 0 \\ 2a+b = -4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} b = -a \\ 2a - a = -4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} b = -a \\ a = -4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} b = 4 \\ a = -4 \end{array}\right.$
$\boxed{\text{La solution du système } (S) \text{ est le couple } (-4\ ;\ 4)}$ et pour tout réel x, $\boxed{g(x) = -4x^2 + 4x + 3}$.

PARTIE B

1. Pour tout réel x, $f'(x) = -4x^3 + \dfrac{8}{3} \times 3x^2 - \dfrac{1}{2} \times 2x - 3 = \boxed{-4x^3 + 8x^2 - x - 3}$.

2. Pour tout réel x, $(x-1)\times g(x) = (x-1)\left(-4x^2 + 4x + 3\right) = -4x^3 + 4x^2 + 3x + 4x^2 - 4x - 3 = -4x^3 + 8x^2 - x - 3 = f'(x)$.
Donc pour tout réel x, $\boxed{f'(x) = (x-1) \times g(x)}$.

3. Pour étudier le signe de $g(x)$, on calcule $\Delta = 64$; $\Delta > 0$ donc deux racines $x_1 = -0.5$ et $x_2 = 1.5$.
Le trinôme est du signe de $a = -4$, donc négatif, sauf entre les racines où il est positif.

x	$-\infty$		-0.5		1		1.5		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{143}{48}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{6}$	$\nearrow$	$\dfrac{5}{16}$	$\searrow$	

4. On constate dans le tableau de variation que le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{143}{48}$.
Donc pour tout réel x, $f(x) \leqslant \dfrac{143}{48}$; or $\dfrac{143}{48} \leqslant 3$ donc pour tout réel x, $f(x) \leqslant 3$.
Donc pour tout réel x, $-x^4 + \dfrac{8}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 2 \leqslant 3$ et donc $\boxed{-x^4 + \dfrac{8}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 3x - 1 \leqslant 0}$.