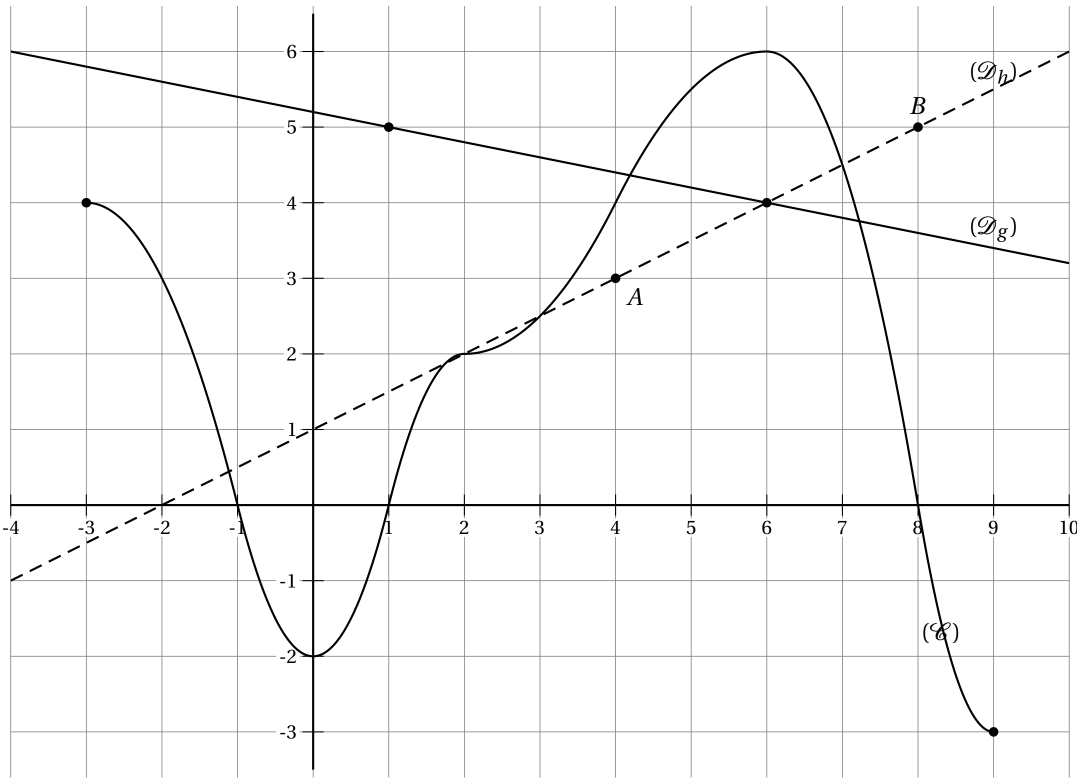
Correction du devoir commun de Mathématiques

Classes de Seconde

Durée : 2 heures

EXERCICE 1



1. **a)** Déterminer l'image de -3 revient à déterminer l'ordonnée du point de $(\mathscr{C})$ayant pour abscisse -3 .
Par lecture graphique , on obtient ainsi que $f(-3) = 4$.
On peut utiliser une méthode identique , pour compléter chaque colonne du tableau de valeurs :

Valeurs de x	-3	-2	4	6
Valeurs de $f(x)$	4	3	4	6

b) Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 4$ revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C})$et de la droite d'équation $y = 4$.
L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathscr{S}_1 = \{-3\ ;\ 4\ ;\ 7,2\}$.

c) Déterminer graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 2$ revient à déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{C})$situés en dessous de la droite d'équation $y = 2$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 2$ est donc $\mathscr{S}_2 = [-1,6\ ;\ 2] \cup [7,7\ ;\ 9]$.

d)
- Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) > 0$ revient à déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{C})$situés au-dessus de l'axe des abscisses .
- Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) < 0$ revient à déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{C})$situés en dessous de l'axe des abscisses .

x	-3		-1		1		8		9
Signe de $f(x)$		+	0	$-$	0	+	0	$-$	

e) Le tableau de variations complet pour la fonction f est le suivant :

x	-3		0		6		9
$f(x)$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6	$\searrow$	-3

f) • D'après le tableau de variations , le maximum de f sur $[-3\ ;\ 9]$ est 6 .
• Le minimum de f sur $[-3\ ;\ 9]$ est -3 .

2. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -0,2x + 5,2$.

a) Comme $g(1) = -0,2 \times 1 + 5,2 = 5$ et $g(6) = -0,2 \times 6 + 5,2 = 4$ et que g est affine , sa représentation graphique est la droite $(\mathscr{D}_g)$ passant par les points de coordonnées $(1\ ;\ 5)$ et $(6\ ;\ 4)$.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ revient à déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{C})$situés au-dessus de la droite $(\mathscr{D}_g)$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ est donc $\mathscr{S}_3 = [4,2\ ;\ 7,2]$.

3. Comme la représentation graphique de h passe par les points $A(4\ ;\ 1)$ et $B(8\ ;\ 3)$, on sait que :

• $h(4) = 1$; • $h(8) = 3$.

Comme h est une fonction affine , l'expression de $h(x)$ est de la forme $h(x) = ax + b$.
En posant $x_1 = 4$ et $x_2 = 8$, on sait , grâce aux résultats du cours , que $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{3-1}{8-4} = \dfrac{2}{4} = 0,5$.
Comme $h(4) = 1$, on en déduit que $0,5 \times 4 + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - 2 = -1$. Donc , pour tout x : $h(x) = 0,5x - 1$.

EXERCICE 2

1. Le signe de $f(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	-10		-1		4		10
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. a) Comme f est croissante sur $[0\ ;\ 4]$ et que $1 < 3$, on en déduit que $f(1) < f(3)$.
L'affirmation « $f(1) < f(3)$ »est donc **vraie** .

b) $-1,5$ appartient à l'intervalle $[-10\ ;\ -1]$ et , d'après le tableau de signes , on sait que $f(x)$est positif pour tout x de cet intervalle .
L'affirmation « $f(-1,5) \geqslant 0$ »est donc **vraie** .

c) -6 appartient à l'intervalle $[-7\ ;\ -1]$.
D'après le tableau de variations , on peut dire que , pour tout x de cet intervalle , $f(x) \in [0\ ;\ 2]$.
Rien ne permet d'affirmer , à priori , que $f(-6) \leqslant 1,5$.
Le tableau de variation ne permet donc pas de savoir si l'affirmation $f(-6) \leqslant 1,5$ est vraie ou fausse .

d) Comme f est décroissante sur $[6\ ;\ -10]$ et que $7 < 8$, on en déduit que $f(7) \geqslant f(8)$.
L'affirmation « $f(7) < f(8)$ »est donc **fausse** .

EXERCICE 3

1. Pour tout x , on a $f(x) = (x+3)^2 - 16 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 - 16 = x^2 + 6x + 9 - 16 = x^2 + 6x - 7$.

2. $f(x) = (x+3)^2 - 16 = (x+3)^2 - 4^2$ est de la forme $(x) = a^2 - b^2$ avec $a = x+3$ et $b = 4$.
Donc, pour tout x , $f(x) = ((x+3)-4)((x+3)+4) = (x+3-4)(x+3+4) = (x-1)(x+7)$

3. L'affirmation « l'image d'un nombre négatif est un nombre négatif »est **fausse** car il existe des nombres négatifs dont l'image par f est positive .
Par exemple , l'image de -8 par f est $f(-8) = (-8+3)^2 - 16 = (-5)^2 - 16 = 25 - 16 = 9$ et $9 > 0$.

4. a) En utilisant la forme développée de $f(x)$, on obtient $f(-5) = (-5)^2 + 6 \times (-5) - 7 = 25 - 30 - 7 = -12$;

b) L'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $(x-1)(x+7) = 0$.
Un produit de facteurs étant nul si et seulement si l'un des facteurs , on en déduit que cette dernière équation équivaut à $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -7$.
L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est donc $\mathscr{S}_1 = \{-7\ ;\ 1\}$.

c) En utilisant la forme factorisée de $f(x)$, on sait que $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+7) \geqslant 0$.
Ainsi , résoudre cette inéquation revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est positif .

x	$-\infty$		-7		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en conclut que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est $\mathcal{S}_2 =]-\infty\ ;\ -7] \cup [1\ ;\ +\infty[$.

d) L'équation $f(x) = -7$ est équivalente à $x^2+6x-7=-7 \Leftrightarrow x^2+6x=0 \Leftrightarrow x(x+6)=0$.
Un produit de facteurs étant nul si et seulement si l'un des facteurs , on en déduit que cette dernière équation équivaut à $x=0$ ou $x+6=0 \Leftrightarrow x=-6$.
L'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=-7$ est donc $\mathcal{S}_3 = \{-6\ ;\ 0\}$.

EXERCICE 4

1. Points A , B et C : voir figure complète à la fin de l'exercice .

2. **a)** Points D et E : voir figure complète à la fin de l'exercice .

b) Par lecture graphique , on obtient que $\vec{u}$ a pour coordonnées $(-10\ ;\ -2)$.

3. **a)** Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A) = (-1-3\ ;\ 3-2) = (-4\ ;\ 1)$.

b)
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-4\ ;\ 1)$.
  Donc , le vecteur $3\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3\times(-4)\ ;\ 3\times 1) = (-12\ ;\ 3)$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(x_D - x_A\ ;\ y_D - y_A) = (x_D - 3\ ;\ y_D - 2)$.

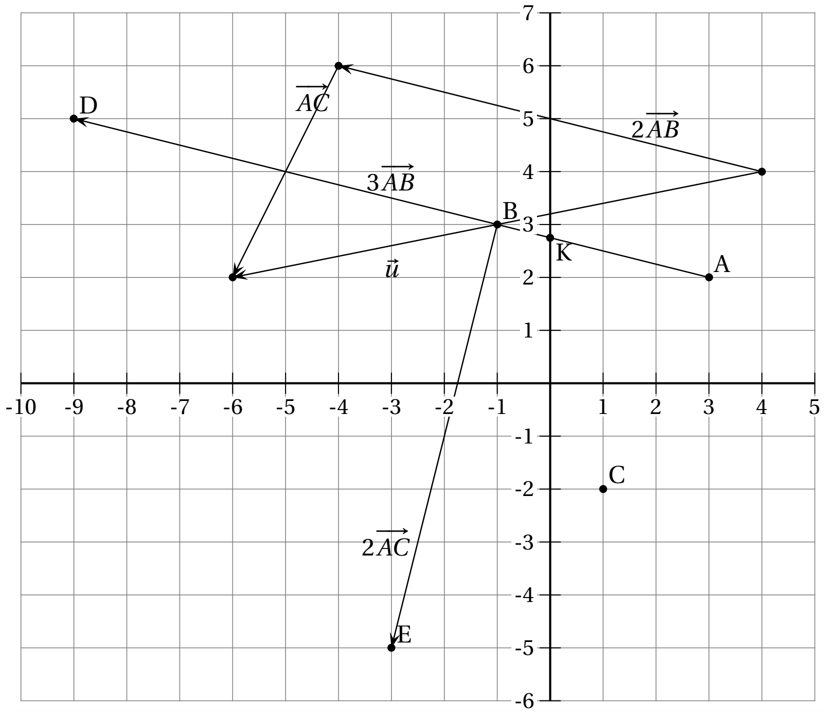
On en déduit que $x_D - 3 = -12 \Leftrightarrow x_D = -12+3 = -9$ et $y_D - 2 = 2 \Leftrightarrow y_D = 2+2 = 4$

c) On en conclut que le point D a pour coordonnées $(-9\ ;\ 4)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-4\ ;\ 1)$.
Donc , $2\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2\times(-4)\ ;\ 2\times 1) = (-8\ ;\ 2)$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(x_C - x_A\ ;\ y_C - y_A) = (1-3\ ;\ -2-2) = (-2\ ;\ -4)$.
- On en déduit que le vecteur $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-8+(-2)\ ;\ 2+(-4)) = (-10\ ;\ -2)$.

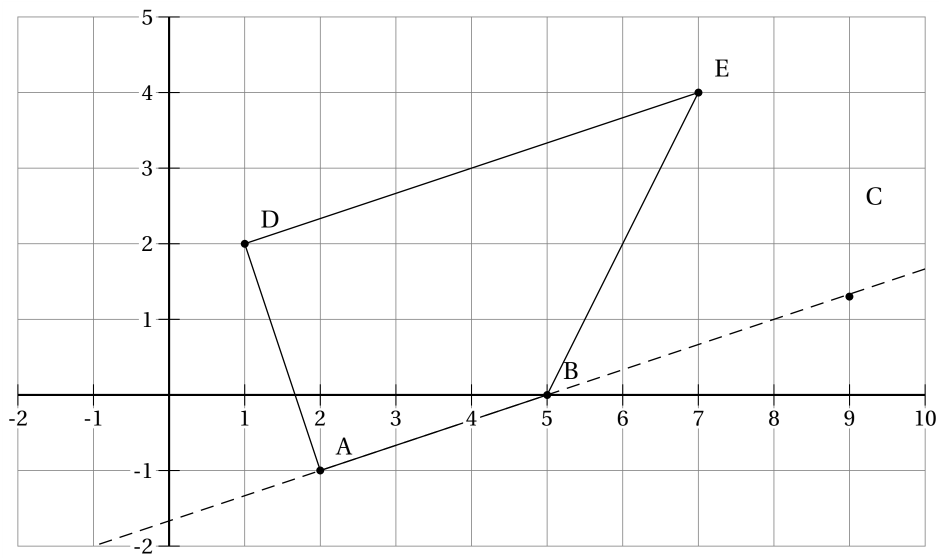
4. **a)** $\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{BK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} + 3\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AK} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AK} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

b) **Figure complète** .



EXERCICE 5

1. **Figure complète** :



2. Pour vérifier si les points $A(2\ ;\ -1)$, $B(5\ ;\ 0)$ et $C(9\ ;\ 1{,}3)$ sont alignés , il suffit de vérifier si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires .
   - Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A) = (5-2\ ;\ 0-(-1)) = (3\ ;\ 1)$.
   - Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(x_C - x_A\ ;\ y_C - y_A) = (9-2\ ;\ 1{,}3-(-1)) = (7\ ;\ 2{,}3)$.

   Le déterminant de ces deux vecteurs est donc $\text{dét}(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = 3 \times 2{,}3 - 7 \times 1 = -0{,}1$.
   Comme leur déterminant est non nul , les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires .
   On en conclut que les points A , B et C ne sont pas alignés

3. $ABED$ est un trapèze si et seulement si sont (AB) et (ED) sont parallèles , c'est-à-dire si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires .

   - Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées $(x_E - x_D\ ;\ y_E - y_D) = (x-1\ ;\ 4-2) = (x-1\ ;\ 2)$.
   - Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ est donc $\text{dét}(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{DE}) = 3 \times 2 - 1 \times (x-1) = 6 - x + 1 = 7 - x$.
   - On en déduit que $ABED$ est un trapèze si $7 - x = 0 \Leftrightarrow -x = -7 \Leftarrow x = \dfrac{-7}{-1} = 7$.

   On en conclut que le point E a pour coordonnées $(7\ ;\ 4)$.

4. - $AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.
   - D'une part , $AD^2 + DE^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(2\sqrt{10}\right)^2 = 10 + 4 \times 10 = 50$;
   - D'autre part , $AE^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 25 \times 2 = 50$.
   - On en déduit que $AD^2 + DE^2 = AE^2$.

   On en conclut , grâce à la réciproque du théorème de Pythagore , que le triangle ADE est rectangle en D et , par suite , que le $ABED$ est un trapèze rectangle .
   C'est donc à la fois rassuré et exsangue que nous pouvons répondre par l'affirmative à la question posée en préambule .