Correction du devoir commun de Mathématiques

EXERCICE 1

1. L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble des abscisses des points de $(\mathscr{C})$.
   Donc , l'ensemble de définition de f est $[-4\ ;\ 9]$.
2. Déterminer l'image de -4 revient à déterminer l'ordonnée du point de $(\mathscr{C})$ayant pour abscisse -4 .
   Par lecture graphique , on obtient ainsi que $f(-4) = 6$.
   On peut utiliser une méthode identique , pour compléter chaque colonne du tableau de valeurs :

Valeurs de x	-4	3	5	8	-2
Valeurs de $f(x)$	6	-3	-3	0	8

3. Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = -2$ revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C})$et de la droite d'équation $y = -2$.
   L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathscr{S}_1 = \{2,6; 5,4; 8,4\}$.
4. • Déterminer graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 6$ revient à déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{C})$situés au-dessus de la droite d'équation $y = 6$.
   L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $\mathscr{S}_3 = [-4\ ;\ 0]$.
   • De même , déterminer graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant -3$ revient à déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{C})$situés en dessous de la droite d'équation $y = -3$.
   L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant -3$ est donc $\mathscr{S}_4 = [3\ ;\ 5] \cup [8,6\ ;\ 9]$.
5. • Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) > 0$ revient à déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{C})$situés au-dessus de l'axe des abscisses .
   • Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) < 0$ revient à déterminer les abscisses des points de $(\mathscr{C})$situés en dessous de l'axe des abscisses .

x	-4		2		6		8		9
Signe de $f(x)$		+	0	$-$	0	+	0	$-$	

6. Le tableau de variations complet pour la fonction f est le suivant :

x	-4		-2		4		7		9
Variations de f	6	↗	8	↘	-4	↗	2	↘	-6

7. • D'après le tableau de variations , le maximum de f sur $[-4\ ;\ 9]$ est 8 .
   • Le minimum de f sur $[-4\ ;\ 9]$ est -6 .

EXERCICE 2

1. Comme $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{BC}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires . Donc , A , B et C sont alignés.
2. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AB} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AC} = 1,25\overrightarrow{AC}$.
3. Comme $1,5 \times x_B + 2 = 1,5 \times 2 + 2 = 3 + 2 = 5 = y_B$, la droite $(\mathscr{D})$ passe par le point B .
4. Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-1}{6-3} = -\dfrac{1}{3}$.
5. On peut compléter le tableau par les effectifs cumulés croissants :

Nombre de fautes	0	2	3	4	5	1 0	14	20
Effectifs	1	2	2	4	8	5	2	1
Effectifs cumulés croissants	1	3	5	9	17	22	24	25

   Comme $\dfrac{25}{4} = 6,25$, cela signifie que le premier quartile est la septième valeur de la série .
   Donc , le premier quartile de cette série série est 4 .

6. La moyenne de cette série est $\bar{x} = \dfrac{1\times 0+2\times 2+2\times 3+4\times 4+8\times 5+5\times 10+2\times 14+1\times 20}{25} = \dfrac{164}{25} \approx 6,6$.

7. D'après les données de l'énoncé , on obtient le tableau d'effectifs suivant :

	Marié(e)	Célibataire	Total
Femmes	15	9	24
Hommes	24	12	36
Total	39	21	60

La probabilité pour que la fiche soit celle d'une personne célibataire est $\dfrac{7}{20}$.

8. Les plans (EGB) et (ADH) ont le point E en commun car E appartient à la face (ADH), donc l'intersection des plans est une droite passant par E.
On sait que deux plans parallèles (les faces opposées (ADH) et (BCG)) sont coupées par un troisième plan selon des droites parallèles.
Or , (EBG) coupe (BCG) selon la droite (BG), donc il coupe (ADH) selon une droite parallèle à (BG) (et passant par E) . Donc , les plans (ADH) et (EGB) sont sécants selon la droite parallèle à (AH) passant par E .

EXERCICE 3

1. Dans le repère orthonormé (O, I, J) donné en annexe, placer les points A , B et C de coordonnées

$A\,(-3\,;\,2)$, $B\,(3,5\,;\,7,5)$ et $C\,(4\,;\,-1)$, puis un représentant du vecteur $\vec{v}(-15\,;\,-13)$

2. Grâce aux formules du cours , on sait que le point K a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_C}{2}\,;\,\dfrac{y_A+y_C}{2}\right) = \left(\dfrac{-3+4}{2}\,;\,\dfrac{2+(-1)}{2}\right) = (0,5\,;\,0,5)$.

3. **a)** $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(3,5-(-3))^2+(7,5-2)^2}$.
D'où $AB = \sqrt{6,5^2+5,5^2} = \sqrt{42,25+30,25} = \sqrt{72,5}$.

   b) Comme $AK^2 = 14,5$, $BK^2 = 58$ et $AB^2 = 72,5$, on en déduit que $AK^2+BK^2 = 14,5+58 = 72,5$ et , par suite , que $AB^2 = AK^2+BK^2$.
On en conclut , grâce à la réciproque du théorème de Pythagore , que le triangle ABK est rectangle en K .

4. Grâce au résultat précédent , on sait la droite (BK) est perpendiculaire à (AK) , ce qui revient à dire que (BK) est la hauteur du triangle ABC issue de B . Comme K est le milieu de $[AC]$, cela signifie que , dans le triangle ABC , la médiane et la hauteur issue de B sont confondues .
Donc , le triangle ABC est isocèle en B .

5. **a)** Voir figure complète à la fin de l'exercice . $\overrightarrow{BE} = \vec{v} + \overrightarrow{AC}$ ($\vec{v}$ étant le vecteur défini en début d'exercice) .

   b) Comme $\overrightarrow{CD} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BA}$, les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires .
On en conclut que les droites (CD) et (AB) sont parallèles et , par suite , que $ABCD$ est un trapèze .

   c) • Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $(x_A-x_B\,;\,y_A-y_B) = (-3-3,5\,;\,2-7,5) = (-6,5\,;\,-5,5)$.
Donc , le vecteur $\overrightarrow{CD} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $(1,5\times(-6,5)\,;\,1,5\times(-5,5)) = (-9,75\,;\,-8,25)$.
   • Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(x_D-x_C\,;\,y_D-y_C) = (x_D-4\,;\,y_D+1)$.
On en déduit que $x_D-4 = -9,75 \Leftrightarrow x_D = -9,75+4 = -5,75$ et $y_D+1 = -8,25 \Leftrightarrow y_D = -8,25-1 = -9,25$.
Donc , le point D a pour coordonnées $(-5,75; -9,25)$.

   d) • Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(x_C-x_A\,;\,y_C-y_A) = (4-(-3)\,;\,-1-2) = (7\,;\,-3)$.
Donc , le vecteur $\overrightarrow{BE} = \vec{v}+\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-11+7\,;\,-9-3) = (-4\,;\,-12)$.
   • Le vecteur $\overrightarrow{BE}$ a pour coordonnées $(x_E-x_B\,;\,y_E-y_B) = (x_E-3,5\,;\,y_E-7,5)$.
On en déduit que $x_E-3,5 = -4 \Leftrightarrow x_E = -4+3,5 = -0,5$ et $y_E-7,5 = -12 \Leftrightarrow y_E = -12+7,5 = -4,5$.
Donc , le point E a pour coordonnées $(-0,5; -4,5)$.

6. • **Première méthode** : Pour montrer que les points B , I et E sont alignés , il suffit de vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires .

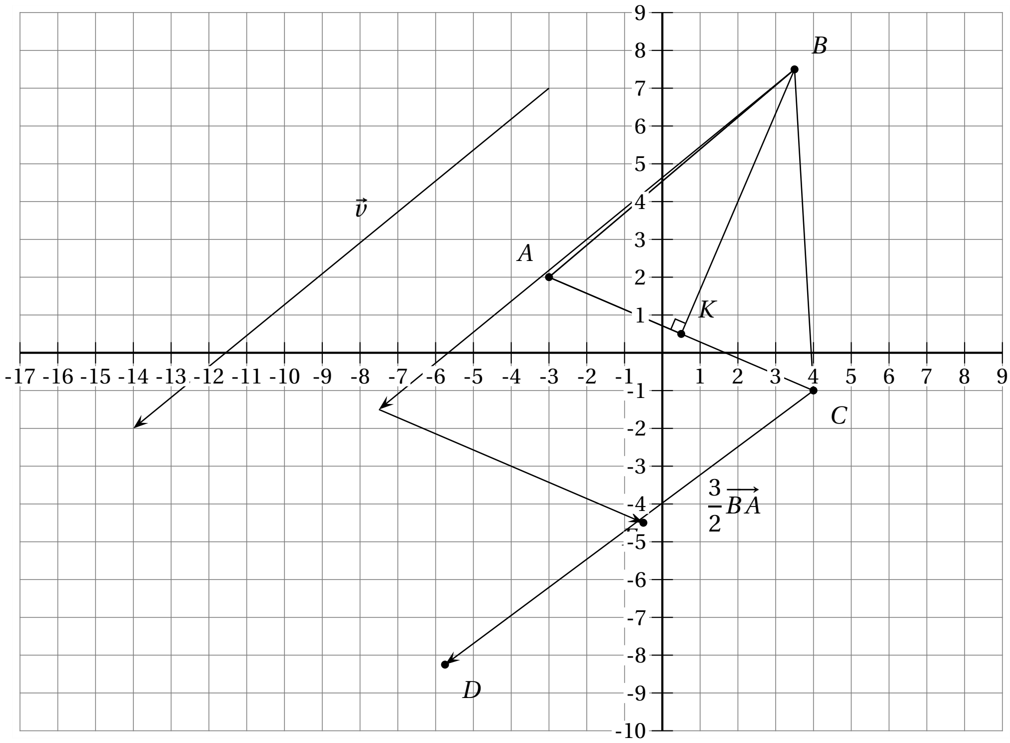
   · Le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $(x_I-x_B\,;\,y_I-y_B) = (1-3,5\,;\,0-7,5) = (-2,5\,;\,-7,5)$.
   · Le vecteur $\overrightarrow{BE}$ a pour coordonnées $(x_E-x_B\,;\,y_E-y_B) = (-0,5-3,5\,;\,-4,5-7,5) = (-4\,;\,-12)$.

dét($\overrightarrow{BI}$; $\overrightarrow{BE}$) $= (-2,5) \times (-4) - (-7,5) \times (-12) = 0$.
Comme leur déterminant est nul (critère de colinéarité) , les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires .
On en conclut que les points B , I et E sont alignés .

- **Deuxième méthode** : Comme les points B et E n'ont pas la même abscisse , la droite (BE) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées .
Elle admet donc une équation de la forme $y = mx + p$.
De plus , on sait , grâce aux formules du cours , que $m = \dfrac{y_E - y_B}{x_E - x_B} = \dfrac{-4,5-7,5}{-0,5-3,5} = 3$. On en déduit que l'équation réduite de (BE) est de la forme $y = 3x + p$.
Comme B appartient à cette droite , $3 \times x_B + p = y_B \Leftrightarrow 3 \times 3,5 + p = 7,5 \Leftrightarrow 10,5 + p = 7,5 \Leftrightarrow p = 7,5 - 10,5 = -3$.
On en conclut que l'équation réduite de (BE) est $y = 3x - 3$.
Comme $3 \times x_I - 3 = 3 \times 1 - 3 = 0 = y_I$, on en conclut que I appartient à la droite (BE) , ce qui revient à dire que les points B , I et E sont alignés .
- **Troisième méthode** : Les droites (BE) et (BI) ont pour coefficients directeurs respectifs

· $m_1 = \dfrac{y_E - y_B}{x_E - x_B} = \dfrac{-4,5-7,5}{-0,5-3,5} = 3$ · $m_2 = \dfrac{y_I - y_B}{x_I - x_B} = \dfrac{0-7,5}{1-3,5} = 3$

Comme elles ont le même coefficient directeur , on en conclut que les droites (BE) et (BI) sont parallèles , ce qui revient à dire que les points B , I et E sont alignés .
- **Quatrième méthode** : On calcule :
· $BE = \sqrt{(x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2} = \sqrt{(-0,5-3,5)^2 + (-4,5-7,5)^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$;
· $BI = \sqrt{(x_I - x_B)^2 + (y_I - y_B)^2} = \sqrt{(1-3,5)^2 + (0-7,5)^2} = \sqrt{62.5} = 2,5\sqrt{10}$;
· $EI = \sqrt{(x_I - x_E)^2 + (y_I - y_E)^2} = \sqrt{(1+0,5)^2 + (0+4,5)^2} = \sqrt{22.5} = 1,5\sqrt{10}$.
On en déduit que $BE = BI + IE$, ce qui n'est possible que si I appartient au segment $[BE]$.
Cela implique , en particulier , que B , I et E sont alignés .



EXERCICE 4

Partie A

1. Compréhension de la situation : On suppose ici que $x = AM = 5$.
Si $AM = 5$,
   - l'aire du carré $AMNP$ est égale à $AM^2 = 5^2 = 25$. Donc , $f(5) = 5$.

- l'aire du triangle CDN est égale à $\frac{1}{2} \times CD \times DP = \frac{1}{2} \times 20 \times 15 = 150$. Donc , $g5) = 150$.

2. • Si x est un réel de l'intervalle $[0\ ;\ 20]$, l'aire du carré $AMNP$ est égale à $AM^2 = x^2$. Donc , $f(x) = x^2$.

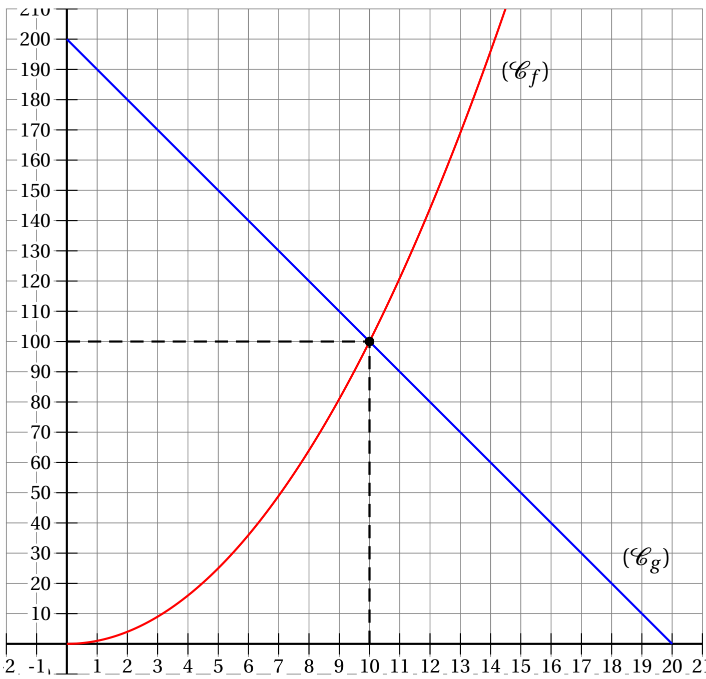
- L'aire du triangle CDN est égale à $\frac{1}{2} \times 20 \times (20 - x) = 10(20 - x) = -10x + 200$. Donc , $g(x) = -10x + 200$.

3. **a)** Tracé des courbes représentatives des fonctions f et g : voir ci-contre .

b) Dire que les aires de $AMNP$ et celle de CDN sont égales revient à dire que $f(x) = g(x)$.

Les solutions éventuelles sont donc les abscisses des points d'intersection des courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.

On en conclut , par lecture graphique , qu'il y a une unique solution $x = 10$.



4. **a)** Pour tout réel x , $(x+5)^2 - 15^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 - 15^2 = x^2 + 10x + 25 - 225 = x^2 + 10x - 200$.

b) L'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à $x^2 = -10x + 200 \Longleftrightarrow x^2 + 10x - 200 = 0$.
Comme , pour tout réel x , $(x+5)^2 - 15^2 = x^2 + 10x - 200$, on en conclut que l'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à $(x+5)^2 - 15^2 = 0$.

c) Un produit de facteurs étant nul si et seulement l'un des facteurs est nul , on en déduit que l'équation $(x+10)(x-20) = 0$ est équivalente à

- $x - 10 = 0 \Longleftrightarrow x = 10$ ou
- $x + 20 = 0 \Longleftrightarrow x = -20$.

L'ensemble des solutions de l'équation $(x-10)(x+20) = 0$ est donc $\mathscr{S} = \{-20\ ;\ 10\}$.

d) Grâce aux identités remarquables , on oobtient , pour tout x :

$$(x+5)^2 - 15^2 = ((x+5) - 15)\,((x+5) + 15) = (x+5-15)\,(x+5+15) = (x-10)(x+20).$$

D'après les résultats précédents , on sait que le problème posé revient à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
Or , $f(x) = g(x) \Longleftrightarrow (x+5)^2 - 15^2 = 0 \Longleftrightarrow (x-10)(x+20) = 0$.
Comme les solutions de cette équation sont $x = 10$ et $x = -20$ et que x doit appartenir à l'intervalle $[0\ ;\ 20]$, on en conclut que les aires de $AMNP$ et de CDN sont égales lorsque $AM = 10$.

Partie B

1. Par définition de h , on a $h(x) = f(x) + g(x)$.
Donc , $h(x) = x^2 + (200 - 10x) = x^2 - 10x + 200$.

2. **a)** Par lecture graphique , on obtient que $h(x) \leqslant 211$ lorsque $x \leqslant 11$.

b) • L'inéquation $(x-11)(x+1) \leqslant 0$ est équivalente à $x^2 + x - 11x - 11 \leqslant 0 \Longleftrightarrow x^2 - 10x - 11 \leqslant 0$.
• L'inéquation $h(x) \leqslant 211$ est équivalente à $x^2 - 10x + 200 \leqslant 211 \Longleftrightarrow x^2 - 10x + 200 - 211 \leqslant 0 \Longleftrightarrow x^2 - 10x - 11 \leqslant 0$.
On en conclut que l'inéquation $h(x) \leqslant 211$ est équivalente à $(x-11)(x+1) \leqslant 0$.
Ainsi , résoudre l'inéquation $h(x) \leqslant 211$ revient à déterminer pour quelles valeurs de x le produit $(x-11)(x+1)$ est positif

ou nul .
Comme le signe de ce produit est donné par le tableau

x	$-\infty$		-1		11		$+\infty$
Signe de $x-11$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x-11$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

on en conclut que l'ensemble des solutions de $(x-11)(x+1) \leqslant 0$ est $\mathscr{S} = [-1\,;\,11]$.
Comme x appartient à l'intervalle $[0\,;\,20]$, on en conclut que la somme des aires de $AMNP$ et de CDN est inférieure à 211 lorsque $0 \leqslant AM \leqslant 11$.

3. Pour tout réel x , $(x-5)^2+175 = x^2-2\times x\times 5+5^2+175 = x^2-10x+200 = h(x)$.
Donc , pour tout $x \in [0\,;\,20]$, $h(x) = (x-5)^2+175$.

- **Première méthode**
Grâce aux résultats du cours , on sait que les variations de h sont données par le tableau :

x	0		5		20
$h(x)$		$\searrow$	175	$\nearrow$	

Donc , le minimum de la fonction h est 175 et il est atteint pour $x = 5$.

- **Deuxième méthode**
Comme un carré est toujours positif , on sait que , pour tout $x \in [0\,;\,20]$, $(x-5)^2 \geqslant 0 \Longrightarrow (x-5)^2+175 \geqslant 175 \Longleftrightarrow h(x) \geqslant 175$.
Comme $h(5) = (5-5)^2+175 = 175$, cette dernière inégalité permet d'affirmer que le minimum de la fonction h est 175 et il est atteint pour $x = 5$.