

Correction du devoir commun de mathématiques du 14/02/14

SUJET B

EXERCICE 1

Partie A

1. a. Graphiquement, l'image de 0 est $f(0) = 3$ et l'image de -2 est $f(-2) = 3$.
 - b. Graphiquement, les antécédents de 0 par f sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses : ce sont donc -3 et 1 .
Graphiquement, les antécédents de 2 par f sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec la droite d'équation $y = 2$: ce sont donc environ $-2,4$ et $0,4$.
2. a. Le tableau de variation de f sur $[-3; 5]$ est

x	-5	-1	3
Variation de f			

- b. Le maximum de la fonction f sur $[-5; 3]$ est 4 et il est atteint en $x = -1$.
3. a. Graphiquement, les solutions de $f(x) = -5$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec la droite d'équation $y = -5$. On en déduit que, graphiquement, l'ensemble des solutions de $f(x) = -5$ est $\{-4; 2\}$.
 - b. Graphiquement, les solutions de $f(x) \geq 3$ sont les abscisses des points en lesquels la courbe de f est au-dessus de la droite d'équation $y = 3$. On en déduit que, graphiquement, l'ensemble des solutions de $f(x) \geq 3$ est $[-2; 0]$.
 - c. Sur l'intervalle $[-2; -1]$, f est croissante donc, si $x \in [-2; -1]$ alors $f(-2) \leq f(x) \leq f(-1)$ c'est-à-dire $3 \leq f(x) \leq 4$.
Sur l'intervalle $[-1; 3]$, f est décroissante donc, si $x \in [-1; 3]$ alors $f(-1) \geq f(x) \geq f(3)$ c'est-à-dire $4 \geq f(x) \geq -12$. On en déduit que le meilleur encadrement possible est $-12 \leq f(x) \leq 4$.
4. a. La fonction g est une fonction affine restreinte à l'intervalle $[-5; 3]$ donc sa courbe est un segment de droite. Il suffit de deux points pour la tracer. Comme $g(-1) = 3$ et $g(3) = -5$, la courbe de g passe par les points de coordonnées $(-1; 3)$ et $(3; -5)$.
Voir l'annexe pour la construction.
 - b. Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec celle de g . Ainsi, graphiquement, l'ensemble des solutions de $f(x) = g(x)$ est $\{-1,4; 1,4\}$.
 - c. Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points en lesquels la courbe de f est strictement en dessous de celle de g . Ainsi, graphiquement, l'ensemble des solutions de $f(x) < g(x)$ est $[-5; -1,4[\cup]1,4; 3]$.

Partie B

1. a. $f(x) = 4 - (x^2 + 2x + 1) = 4 - x^2 - 2x - 1$ donc $f(x) = -x^2 - 2x + 3$.
 - b. $f(x) = 2^2 - (x+1)^2 = [2 + (x+1)][2 - (x+1)] = (2+x+1)(2-x-1)$ donc $f(x) = (x+3)(-x+1)$.
2. $f(2) = 4 - (2+1)^2 = 4 - 9 = -5$ et $f(-\sqrt{3}) = -(-\sqrt{3})^2 - 2(-\sqrt{3}) + 3 = -3 + 2\sqrt{3} + 3 = 2\sqrt{3}$.
3. Chercher les antécédents de 0 par f revient à résoudre $f(x) = 0$. Pour cela, on utilise la forme factorisée :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(-x+1) = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0 \text{ ou } -x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } 1 = x.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ est $\{-3; 1\}$.

4. On utilise la forme développée :

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 3 \Leftrightarrow -x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow -x(x+2) = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \text{ ou } x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $f(x) = 3$ est $\{-2; 0\}$.

5. On utilise la forme développée de $f(x)$:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = -2x + 1 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 - (-2x + 1) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 - x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} - x = 0 \text{ ou } \sqrt{2} + x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} = x \text{ ou } x = -\sqrt{2}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $f(x) = g(x)$ est $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

EXERCICE 2

Partie A

1. a. Voir l'annexe.

b. Les coordonnées de K sont $x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0$ et $y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + 6}{2} = 3$ c'est-à-dire $\boxed{K(0; 3)}$.

c. Les coordonnées du milieu de [CD] sont $\frac{x_C + x_D}{2} = \frac{-2 + 2}{2} = 0 = x_K$ et $\frac{y_C + y_D}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3 = y_K$ donc K est aussi le milieu de [CD].

d. Les diagonales du quadrilatère AD BC se coupent en leur milieu donc $\boxed{\text{AD BC est un parallélogramme}}$.

2. a. Par définition, C est le milieu de [EA] donc $x_C = \frac{x_E + x_A}{2} = \frac{x_E - 1}{2} = \frac{x_E}{2}$ donc $x_E - 1 = 2x_C = 2 \times (-2) = -4$ donc $x_E = -3$ et $y_C = \frac{y_E + y_A}{2} = \frac{y_E + 0}{2}$ donc $y_E = 2y_C = 2 \times 2 = 4$. Finalement, $\boxed{E(-3; 4)}$.

b. Par théorème, $AE = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2} = \sqrt{(-3 - (-1))^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{4 + 16}$ soit $\boxed{AE = \sqrt{20}}$.

3. a. D'une part, $AB^2 = 2\sqrt{10}^2 = 40$ et, d'autre part, $AE^2 + EB^2 = \sqrt{20}^2 + (2\sqrt{5})^2 = 20 + 20 = 40$ donc $AB^2 = AE^2 + EB^2$. Ainsi, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AEB est rectangle en E.

b. Par théorème, on en déduit que le centre du cercle (C) circonscrit au triangle ABE est le milieu de l'hypoténuse [AB] c'est-à-dire le point K.

c. Voir l'annexe.

Partie B

1. Voir l'annexe.

2. $\overrightarrow{AB} (x_B - x_A; y_B - y_A)$ soit $\overrightarrow{AB} (-6 - (-2); 5 - 7)$ et donc $\boxed{\overrightarrow{AB} (-4; -2)}$.

3. Le point D est tel que ABCD soit un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Or, $\overrightarrow{DC} (x_C - x_D; y_C - y_D)$ soit $\overrightarrow{DC} (2 - x_D; 5 - y_D)$ donc ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\begin{cases} 2 - x_D = -4 \\ 5 - y_D = -2 \end{cases}$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_D = 6 \\ y_D = 7 \end{cases}. \text{ Ainsi, } \boxed{D(6; 7)}.$$

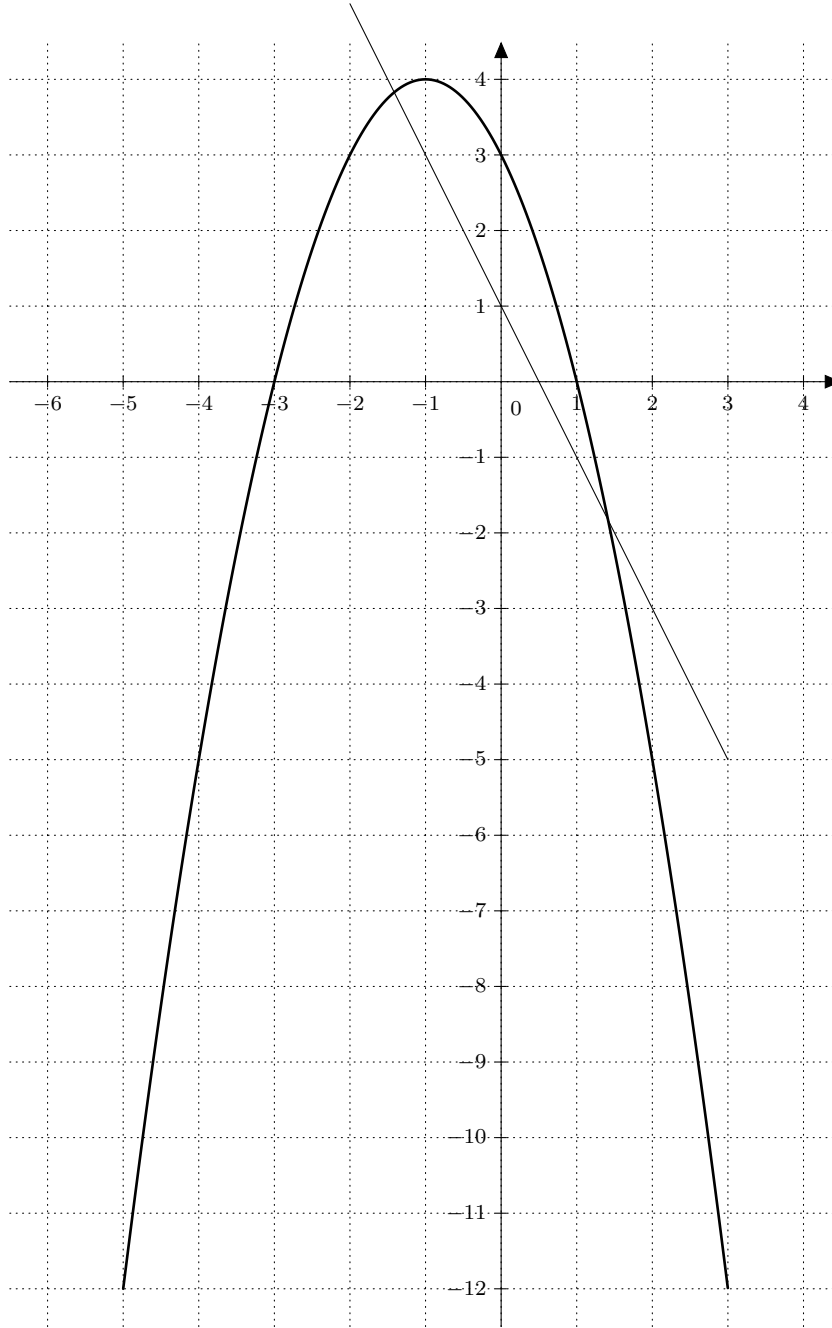
4. Voir l'annexe.

5. Par définition, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$ donc le quadrilatère ABEC est un parallélogramme.

6. Puisque ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ et, puisque ABEC est un parallélogramme, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EC}$. Il s'ensuit que $\boxed{\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CD}}$ et donc que C est le milieu du segment [DE].

ANNEXE

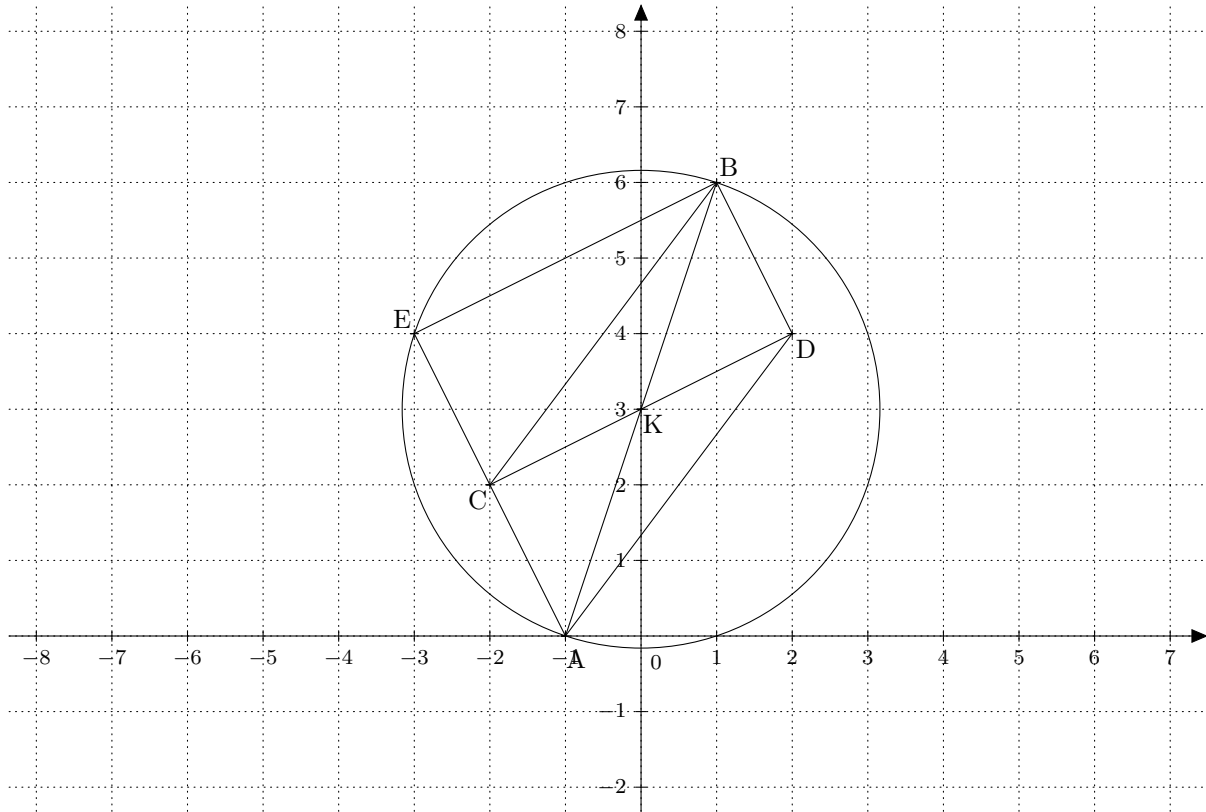
Exercice 1



Exercice 3

Partie A	Question 1	(a)	b	c
	Question 2	a	(b)	c
	Question 3	(a)	b	c
Partie B	Question 4	a	b	(c)
	Question 5	a	b	(c)
	Question 6	(a)	b	c
Partie C	Question 7	a	(b)	c
	Question 8	(a)	b	c
	Question 9	(a)	b	c
Partie D	Question 10	a	b	(c)

Exercice 2 – Partie A



Exercice 2 – Partie B

