CORRIGE du devoir commun n° 2 de mathématiques
Niveau Secondes - Année 2012/2013

EXERCICE 1 :

Partie A

1. **a.** La courbe de la fonction *f* est une parabole.

b. $a = 1 > 0$ donc la parabole représentant *f* est orientée vers le haut.

c. Le sommet de *Cf* a pour coordonnées (α ; β) avec : $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{2\times1} = \dfrac{6}{2} = 3$ et $\beta = f(\alpha) = f(3) = 3^2 - 6\times3 + 8 = -1$.

Les coordonnées du sommet sont donc : $\boxed{A\ (3\ ;\ -1)}$.

2. **a.** $(x-3)^2 - 1 = x^2 - 2\times3\times x + 3^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$**.** On a donc bien : $\boxed{f(x) = (x-3)^2 - 1}$..

Autre méthode possible : la forme canonique de $f(x)$ est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 1$, $\alpha = 3$ et $\beta = -1$ donc $\boxed{f(x\ ) = (x-3)^2 - 1}$..

b. On a vu précédemment que la parabole représentant *f* est orientée vers le haut et que son sommet a pour abscisse 3. La fonction *f* est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 3]$ et croissante sur l'intervalle $[3\ ;\ +\infty[$.

Tableau de variation de la fonction *f* :

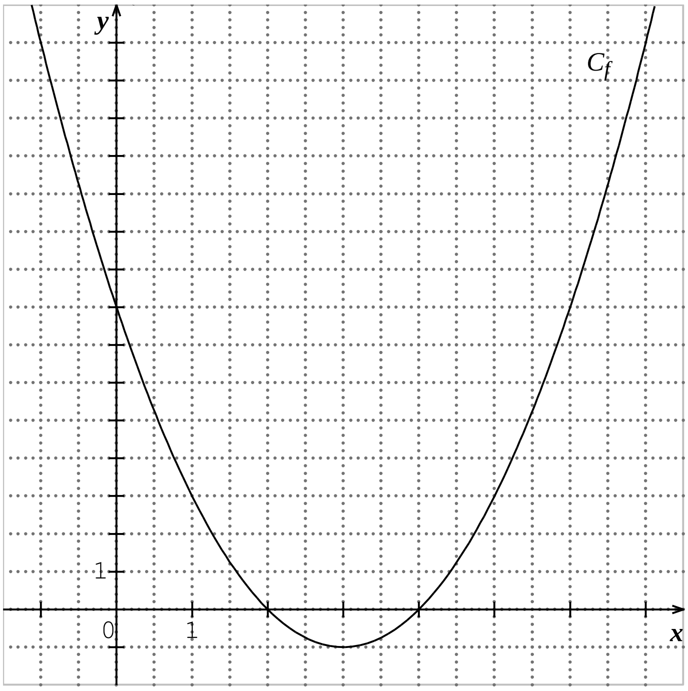
x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

c. La fonction *f* admet donc un minimum sur $\mathbb{R}$ égal à -1 atteint pour $x = 3$.

3. **a.**

x	-1	0	1	2	2,5	3	3,5	4	5	6	7
$f(x)$	15	8	3	0	$-0{,}75$	-1	$-0{,}75$	0	3	8	15

b. Représentation graphique de la fonction *f* :



4. On se propose de résoudre l'inéquation $f(x) \geq 15$.

a. $f(x) \geq 15 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 1 \geq 15 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 16 \geq 0$.

On factorise $(x-3)^2 - 16$: $(x-3)^2 - 16 = (x-3)^2 - 4^2 = (x-3-4)(x-3+4) = (x-7)(x+1)$. Donc l'inéquation $\boxed{f(x) \geq 15 \text{ équivaut donc bien à à } (x-7)(x+1) \geq 0}$.

b. Etudions le signe de $(x-7)(x+1)$. à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$ $\quad$ -1	7	$+\infty$
$x-7$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)(x+3)$	$+$	$-$	$+$

c. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $f(x) \geq 15$ sont les solutions de l'inéquation $(x-7)(x+1) \geq 0$.. On a donc : $\boxed{S =]-\infty\ ;\ -1] \cup [7\ ;\ +\infty[}$.

Partie B

1. On découpe une bande de largeur 4cm dans un carré de côté x donc nécessairement $x > 4$ soit $\boxed{x \in]4\ ;\ +\infty[}$.

2. Le rectangle hachuré a pour longueur $x-2$ et pour largeur $x-4$. Son aire est donc : $\boxed{S(x) = (x-4)(x-2)}$.

3. $S(x) = (x-4)(x-2) = x^2 - 2x - 4x + 8 = x^2 - 6x + 8$.Pour $x \in]4\ ;\ +\infty[$, on a donc : $\boxed{S(x) = f(x)}$.

4. On doit résoudre : $S(x) \geq 15$ ce qui revient à résoudre <u>dans l'intervalle</u> $]4\ ;\ +\infty[$, $f(x) \geq 15$.

D'après la question **4.c.** de la **partie A**, on a $\boxed{S = [7\ ;\ +\infty[}$.

EXERCICE 2 :

D'après l'algorithme, on doit répéter le même calcul : $0{,}5\times U + 2$ tant que la valeur obtenue, qui devient la nouvelle valeur de U, reste inférieure à 3,8. Dans le même temps la valeur de V s'incrémente de 1 (c'est-à-dire augmente de 1).

L'algorithme s'arrêtera lorsque $0{,}5\times U + 2$ devient supérieur à 3,8. Cela se produit lorsque U = 3,859375.

$\boxed{\text{L'algorithme affichera donc la valeur de V, c'est-à-dire 6}}$.

EXERCICE 3 :

1. La loi est équirépartie puisque le jeune est choisi au hasard. Si on note P l'événement « le jeune passe le réveillon chez ses parents », on a : $p(P) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{450}{1800} = \dfrac{1}{4}$ $\boxed{\textbf{Réponse b.}}$

2. La loi est équirépartie puisque le jeune est choisi au hasard. Si on note A l'événement « le jeune est une fille qui passe le réveillon chez des amis », on a : $p(\text{A}) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{550}{1800} = \dfrac{11}{36}$ **Réponse a.**

3. La loi est équirépartie puisque le jeune est choisi au hasard. Si on note B l'événement « le jeune n'est pas un garçon qui va au restaurant », alors l'événement $\overline{\text{B}}$ est « le jeune est un garçon qui va au restaurant » et :

$p(\overline{\text{B}}) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{20}{1800} = \dfrac{1}{90}$, donc : $p(\text{B}) = 1 - p(\overline{\text{B}}) = 1 - \dfrac{1}{90} = \dfrac{89}{90}$ **Réponse d.**

4. La loi est équirépartie puisque la fille est choisie au hasard.. Si on note C l'événement « la fille va au restaurant », on a :

$p(\text{C}) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{130}{950} = \dfrac{13}{95}$ **Réponse c.**

5. La loi est équirépartie puisque le jeune qui va au restaurant est choisi au hasard. Si on note D l'événement « le jeune qui passe le réveillon chez des amis est une fille », on a : $p(\text{C}) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{550}{1200} = \dfrac{11}{24}$ **Réponse c.**

6. La loi est équirépartie puisque le garçon est choisi au hasard. Si on note G l'événement « le jeune est un garçon »et si on note R l'événement « le jeune va au restaurant », alors on doit calculer $p(\text{G}\cup\text{R})$ et on a :

7. $p(\text{G}\cup\text{R}) = p(\text{G}) + p(\text{R}) - p(\text{G}\cap\text{R}) = \dfrac{850}{1800} + \dfrac{150}{1800} - \dfrac{20}{1800} = \dfrac{980}{1800} = \dfrac{49}{90}$. **Réponse d.**

8. Si on choisit un garçon au hasard, la probabilité que ce soit une fille qui aille au restaurant est égale à 0 ! **Réponse a.**

9. La loi est équirépartie puisque le garçon est choisi au hasard. On doit calculer $p(\overline{\text{R}})$.

$p(\overline{\text{R}}) = 1 - p(\text{R}) = 1 - \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = 1 - \dfrac{150}{1800} = 1 - \dfrac{1}{12} = \dfrac{11}{12}$ **Réponse b.**

EXERCICE 4 :

1. a. Les coordonnées du point M milieu de [AB] sont : $x_\text{M} = \dfrac{x_\text{A} + x_\text{B}}{2} = \dfrac{-3+6}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ et $y_\text{M} = \dfrac{y_\text{A} + y_\text{B}}{2} = \dfrac{4+1}{2} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

donc : M (1,5 ; 2,5)

b. Le point E symétrique du point C par rapport à M est tracé sur la figure située à la fin de l'exercice. Si E est le symétrique de C par rapport à M, alors M est le milieu du segment [EC]. On a donc ses coordonnées (x_E ; y_E) qui vérifient : $x_\text{M} = \dfrac{x_\text{E} + x_\text{C}}{2}$ et $y_\text{M} = \dfrac{y_\text{E} + y_\text{C}}{2}$ $\Leftrightarrow$ $2x_\text{M} = x_\text{E} + x_\text{C}$ et $2y_\text{M} = y_\text{E} + y_\text{C}$ $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3 = x_\text{E} + 0 \\ 5 = y_\text{E} + (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = x_\text{E} \\ 5 = y_\text{E} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\text{E} = 3 \\ y_\text{E} = 5 + 1 = 6 \end{cases}$ donc : $\boxed{\text{E } (3 ; 6)}$

c. Dans le quadrilatère ACBE, les diagonales se coupent en leur milieu M, donc ACBE est un parallélogramme.

2. a. Calcul du coefficient directeur *a*: $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_\text{A} - y_\text{C}}{x_\text{A} - x_\text{C}} = \dfrac{4-(-1)}{-3-0} = \dfrac{4+1}{-3} = -\dfrac{5}{3}$. Donc la droite (AC) a une équation de la forme : $y = -\dfrac{5}{3}x + b$. Or C$\in$ (AC) donc ses coordonnées vérifient cette équation : $y_\text{C} = -\dfrac{5}{3}x_\text{C} + b \Leftrightarrow -1 = -\dfrac{5}{3}\times 0 + b \Leftrightarrow$ $b = -1$. Donc $\boxed{\text{une équation réduite de la droite (AC) est : } y = -\dfrac{5}{3}x - 1}$.

b. Le point H est sur la droite (AC) $\Leftrightarrow$ ses coordonnées vérifient l'équation de la droite. On teste si $y_\text{H} = -\dfrac{5}{3}x_\text{H} - 1$.

Calculons : $-\dfrac{5}{3}x_\text{H} - 1 = -\dfrac{5}{3}\times 9 - 1 = -15 - 1 = -16 \neq y_\text{H}$. On en conclut que: $\boxed{\text{H n'est pas sur la droite (AC).}}$

c. Appelons (*h*) la parallèle à (AC) passant par H. La droite (AC) et la droite (*h*) étant parallèles, elles ont le même coefficient directeur. L'équation de (*h*) est donc de la forme : $y = -\dfrac{5}{3}x + b$. De plus H $\in$ (*h*) donc ses coordonnées vérifient : : $y_\text{H} = -\dfrac{5}{3}x_\text{H} + b \Leftrightarrow -13 = -\dfrac{5}{3}\times 9 + b \Leftrightarrow -13 = -15 + b \Leftrightarrow -13 + 15 = b \Leftrightarrow b = 2$. Donc l'équation réduite de la parallèle à (AC) passant par H est : $\boxed{y = -\dfrac{5}{3}x + 2}$.

3. Soit F le point d'intersection des droites (AC) et d. La droite (d) étant la parallèle à l'axe (Oy) passant par B, son équation réduite est donc: $x = x_B \Leftrightarrow x = 6$. Or $F \in (d)$, on en déduit donc que $x_F = 6$. Pour calculer y_F, il suffit d'utiliser l'équation réduite de (AC) avec les coordonnées de F : $y_F = -\frac{5}{3}x_F - 1 = -\frac{5}{3}\times 6 - 1 = -10 - 1 = -11$; donc : F(6 ; –11)

4. a. Pour tracer la droite (Δ) d'équation : $y = 2x + 3$, on choisit 2 points pour tracer cette droite :
Si $x = -3$, alors : $y = 2\times(-3) + 3 = -6 + 3 = -3$.
Si $x = 1$, alors : $y = 2\times 1 + 3 = 2 + 3 = 5$. Ce qui revient dans un tableau de valeur à

x	-3	1
y	-3	5

b. Les droites (Δ) et (AC) sont sécantes car leurs coefficients directeurs sont différents. Le point G appartenant aux deux droites, ses coordonnées vérifient les deux équations réduites : $\begin{cases} y = -\frac{5}{3}x - 1 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 = -\frac{5}{3}x - 1 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{5}{3}x = -1 - 3 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11}{3}x = -4 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4\times\frac{3}{11} \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{12}{11} \\ y = 2\times\left(-\frac{12}{11}\right) + 3 = -\frac{24}{11} + \frac{33}{11} = \frac{9}{11} \end{cases}$. Donc $\boxed{G\left(-\frac{12}{11};\frac{9}{11}\right)}$.

c. $4x - 2y = 0 \Leftrightarrow 4x = 2y \Leftrightarrow y = 2x$.L es équations réduites des deux droites ayant le même coefficient directeur, ces deux droites sont parallèles.

5. Les points A, B et D sont alignés si, et seulement si, les droites (AB) et (AD) ont le même coefficient directeur.

Calculons donc : Pour la droite (AB) : $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4-1}{-3-6} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$.

Pour la droite (AD) : $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \frac{4-(-1)}{-3-12} = \frac{4+1}{-15} = \frac{5}{-15} = -\frac{1}{3}$.

Les coefficients directeur étant identiques, on en déduit que les points A,B et D sont alignés.