Lycée Jacques Prévert. Saint-Christol-les-Alès Jeudi 22 Mars 2014

Correction du devoir commun de Mathématiques

SECONDES

Durée 2 heures. Calculatrice autorisée.

Question de cours : 2 points

Patrick doit **démontrer** que trois points A, B et C dont on connaît les coordonnées dans un repère sont alignés.

M1 : Patrick peut calculer les coordonnées des vecteurs et par exemple et vérifier ensuite s'ils sont colinéaires,

M2 : Patrick peut calculer les longueurs des trois segments (formule du chapitre 1) et vérifier si la somme de deux d'entre elles est égale à la troisième,

Vrai – Faux : 4 points

1. FAUX : Si A(-3 ; 4) et (-2;5) et que B(-1 ; 9) alors $\overrightarrow{AB}$ (2; 5) et non pas (2; -5), donc $\overrightarrow{AB} \neq -\vec{u}$.
2. FAUX : Si a et b sont deux réels négatifs tels que $a < b$ alors $a \leq 0$ *et* $(a\text{-}b) \leq 0$ donc le produit est un nombre positif.
3. VRAI : Si $f(-2)=3$ et f est strictement décroissante sur [-4 ; 3] alors comme les images sont rangées dans l'ordre inverse des antécédents, alors on a $f(0) < 3$.
4. VRAI : Il y a nécessairement au moins 50 timbres dans le catalogue donc au moins 21 (43%) d'hommes célèbres.

   Par conséquent, s'il y en a au moins 21, rien n'empêche d'en prendre au moins 15.

EXERCICE 1 : 3 points

1. On suppose que p = 57% et **on doute de p**.
   $0,2 \leq p \leq 0,8$ et $n \geq 25$ donc l'intervalle de fluctuations au seuil de 5% est donné par :
   $I_f = [\, p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\,] = [\,0,57 - 0,16..\,;\, 0,57 + 0,16..] = [\,0,40\,;\,0,74]$ au seuil de 95%.
   $f = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} \approx 0,39$.
   Donc $f \notin I_f$, donc **on peut rejeter l'hypothèse faite sur p au risque de 5%.**

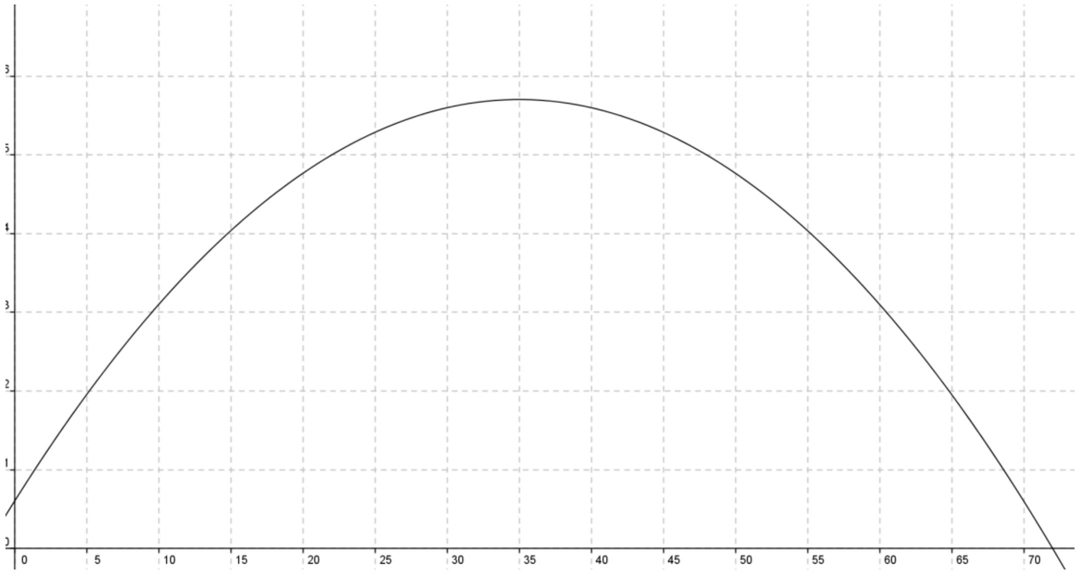
2. On confirme que p = 57% et **on doute de l'échantillon.**
   $0,2 \leq p \leq 0,8$ et $n \geq 25$ donc l'intervalle de fluctuations au seuil de 5% est donné par :
   $I_f = [\, p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\,] = [\,0,57 - 0,16..\,;\, 0,57 + 0,16..] = [\,0,40\,;\,0,74]$ au seuil de 95%.
   $f = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} \approx 0,39$.
   Donc $f \notin I_f$, donc **on peut affirmer, au risque de 5%, que la fluctuation observée n'est pas due au seul phénomène de fluctuations. (ou encore que l'échantillon est biaisé).**

3. Juan cherche à **estimer, à partir de son échantillon** (sa classe), **la proportion de filles dans son lycée.**
   On a : $f = \frac{12}{30} = 0,4$ et $n \geq 25$.
   L'intervalle de confiance, au niveau de 95%, est donné par :

I_c = [f - $\frac{1}{\sqrt{n}}$; f + $\frac{1}{\sqrt{n}}$] = [0,4 – 0,1825.. ; 0,4 + 0,1825..] = [0,217 ; 0,583] au niveau de confiance de 95%.
0,57 ϵ I_c , donc **il est possible, au niveau de confiance de 95%, qu'il y ait 57% de filles dans son lycée.**

EXERCICE 2 : (5,5 points)

1. f(0) = 0,6 , donc au départ du ballon, le ballon est à o,6 mètres du sol.
2.
   a. Dans le mode « graph » ou le mode « tabl », on rentre, en Y1 par exemple, la fonction f.
   Dans le mode « Tabl », on va dans « Set » et on règle : « Start : 0 ; Step : 1 » puis on fait défiler le tableur pour lire le maximum et les valeurs en lesquelles f s'annule.
   Dans le mode graph, on va dans « V-Win » pour régler la fenêtre (« Xmin :0 ; Xmax :…; Ymin : 0 et Y max : … disons 30 mètres.
   On observe la courbe et on conjecture les valeurs du maximum et des valeurs pour lesquelles la courbe coupe l'axe des abscisses.



   On lit : environ 5,8m pour la hauteur maximale et environ 72m pour la retombée du ballon.

   b. On a, pour tout nombre réel x :
   $(x - 35)^2 \geq 0 \leftrightarrow (x - 35)^2 - 1369 \geq -1369 \leftrightarrow (\frac{-1}{240})\,[(x - 35)^2 - 1369] \leq \frac{-1369}{-240} \leftrightarrow f(x) \leq \frac{1369}{240}$
   De plus, $f(35) = \frac{1369}{240}$
   Donc f admet un maximum, qui vaut $\frac{1369}{240}$, atteint pour x = 35.
   Donc la hauteur maximale atteinte par le (centre de gravité du) ballon est d'environ 5,7m, à 35m du gardien.

   En constatant que $\sqrt{1369} = 37$, alors
   $f(x) = (\frac{-1}{240})\,[(x - 35)^2 - (37)^2] = (\frac{-1}{240})\,[(x - 35 - 37)(x - 35 + 37)] = (\frac{-1}{240})\,[(x - 72)(x + 2)]$.
   Donc résoudre f(x) = 0 revient à résoudre (x – 72)(x + 2) = 0, soit x = -2 ou x = 72.
   La seule solution qui convienne au problème est x = 72, ou encore le ballon touchera le sol à 72 mètres du gardien.

3. Hauteur maximale atteinte par le joueur (sommet du crâne) : 1,65 + 0,60 = 2,25m.
   Hauteur du (centre de gravité du) ballon à la verticale du joueur : f(63) = 2,4375m.
   Donc le joueur ne touchera pas le ballon (sauf si le rayon venait à être supérieur à (2,4375 – 2,25 = 0,1875) 18,75 cm mais… ça ne serait plus du foot.

EXERCICE 3 : 5,5 points

Dans le repère orthonormé en annexe, placer les points $A(0;1)$; $B(4;5)$ et $C(6;-1)$.

Faire tous les tracés permettant de vérifier les calculs au fur et à mesure.

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en C.

ABC est isocèle en C si et seulement si AC = BC

Or $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(6-0)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{40}$

et par un calcul analogue $BC=\sqrt{40}$

Donc on a bien $AC=BC$ donc ABC est bien isocèle en C

2. *Montrer que l'équation réduite de la médiane* (d_1) *issue de C dans le triangle ABC est* $y=-x+5$

(d_1) est la médiane issue de C donc elle coupe le coté opposé [AB] en son milieu que nous noterons N

Calculons les coordonnées de $N\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{0+4}{2};\frac{1+5}{2}\right)=(2;3)$

Donc (d_1) passe par les points C et N et son équation réduite est de la forme $y=ax+b$

Calcul du coefficient directeur $a=\frac{y_N-y_C}{x_N-x_C}=\frac{3-(-1)}{2-6}=\frac{4}{-4}=-1$

Donc l'équation réduite de (d_1) est : $y=-x+b$

Déterminons maintenant l'ordonnée à l'origine b . C appartient à (d_1) donc les coordonnées de C vérifient l'équation $y=-x+b$: $-1=-6+b \Leftrightarrow b=-1+6 \Leftrightarrow b=5$

Donc l'équation de (d_1) est bien $y=-x+5$

3. *On sait que l'équation de la médiatrice* (d_2) *du segment [BC]est* $-x+3y=1$

En déduire les coordonnées M le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

ABC est isocèle en C donc la médiane issue de C est aussi la médiatrice de [AB].

Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point de concours des médiatrices.

Donc M est le point d'intersection de (d_1) et (d_2) . Pour déterminer les coordonnées de M on résout alors le système suivant $\begin{cases} y=-x+5 \\ -x+3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+5 \\ -x+3(-x+5)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+5 \\ -4x=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{-7}{2}+5 \\ x=\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{2} \\ x=\frac{7}{2} \end{cases}$

Donc $M(3,5;1,5)$

4. *Déterminer une équation de la droite* (EF) *avec* $E(4;3)$ *et F l'image de E par la translation de vecteur* $\vec{u}(-1;-3)$.

Il y plusieurs méthodes pour répondre à cette question

1° méthode : on détermine les coordonnées de F sachant que si F l'image de E par la translation de vecteur $\vec{u}(-1;-3)$, alors $\overrightarrow{EF}=\vec{u}$. Donc ces 2 vecteurs ont les mêmes coordonnées.

On résout $\begin{cases} x_F-4=-1 \\ y_F-3=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F=3 \\ y_F=0 \end{cases}$. donc $F(3;0)$

La droite (EF) a une équation réduite de la forme $y=ax+b$

Calculons le coefficient directeur $a=\dfrac{y_E-y_F}{x_E-x_F}=\dfrac{3-0}{4-3}=3$ donc l'équation est $y=3x+b$

Déterminons b sachant que les coordonnées de E vérifient l'équation : $3=3\times 4+b \Leftrightarrow b=-9$

Donc l'équation réduite de (EF) est $y=3x-9$

2° méthode : $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (EF) donc pour tout point $P(x,y)$ de la droite (EF) les vecteurs $\overrightarrow{EP}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Donc leurs coordonnées sont proportionnelles.

On a $\overrightarrow{EP}(x-4;y-3)$ et $\vec{u}(-1;-3)$ donc le tableau suivant est proportionnel et les produits en croix sont égaux.

Coordonnées de $\overrightarrow{EP}$	$x-4$	$y-3$
Coordonnées de $\vec{u}$	-1	- 3

On a $-3(x-4)=-1(y-3) \Leftrightarrow -3x+12=-y+3 \Leftrightarrow y=3x-9$ équation réduite de (EF)

5. Le point B appartient-il à cette droite ? Justifier.

Le point B appartient à la droite (EF) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite.

Calculons $3x_B-9$ et comparons à y_B

$3x_B-9=3\times 4-9=12-9=3\neq 5=y_B$ Donc B $\notin$ (EF)