Baccalauréat Première Métropole-La Réunion
série générale e3c Corrigé du n° 10 année 2020

Exercice 1 **5 points**

Ce QCM comprend 5 questions. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une absence de réponse n'apporte ni ne retire de point.

Question 1

Lors d'une même expérience aléatoire, deux évènements A et B vérifient :

$$P(A) = 0{,}4 \quad ; \quad P(B) = 0{,}6 \quad ; \quad P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}3$$

Alors :

a. $P(A \cap B) = 0{,}1$	**b.** $P(A \cap B) = 0{,}24$	**c.** $P(A \cup B) = 1$	**d.** $P(A \cup B) = 0{,}7$

On a $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B)$, soit $0{,}3 = 0{,}4 - P(A \cap B)$, d'où $P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}1$. (accessoirement : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}6 - 0{,}1 = 0{,}9$.)

Question 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$. L'abscisse du minimum de f est :

a. $-\dfrac{3}{2}$	**b.** $\dfrac{2}{3}$	**c.** $\dfrac{3}{2}$	**d.** 1

On a $f(x) = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} + 4 = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4}$.
Le minimum de $f(x)$ est obtenu quand le carré est nul, soit pour $x = \dfrac{3}{2}$ et ce minimum est égal à $\dfrac{7}{4}$.

Question 3

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = 26$ et $u_9 = 8$. La raison de (u_n) vaut :

a. -18	**b.** $\dfrac{8}{26}$	**c.** 4,5	**d.** $-4{,}5$

Si u_0 est le premier terme et r la raison on a $u_5 u_0 + 5r$ et $u_9 = u_0 + 9r$, d'où par différence
$u_9 - u_5 = 8 - 26 = -18 = 4r$, soit $r = -\dfrac{9}{2} = -4{,}5$.

Question 4

On considère l'algorithme suivant, écrit en langage usuel :

```
Suite(N)
  A ← 10
  Pour k de 1 à N
    A ← 2*A-4
  Fin Pour
  Renvoyer A
```

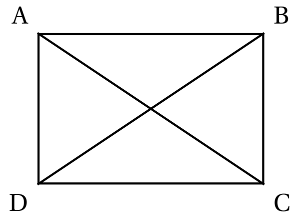
Pour la valeur $N = 4$ le résultat affiché sera :

a. 4	**b.** 100	**c.** 52	**d.** 196

On obtient successivement comme valeurs de A : 16 ; 28 ; 52 et 100.

Question 5

On considère un rectangle ABCD tel que AB = 3 et AD = 2.



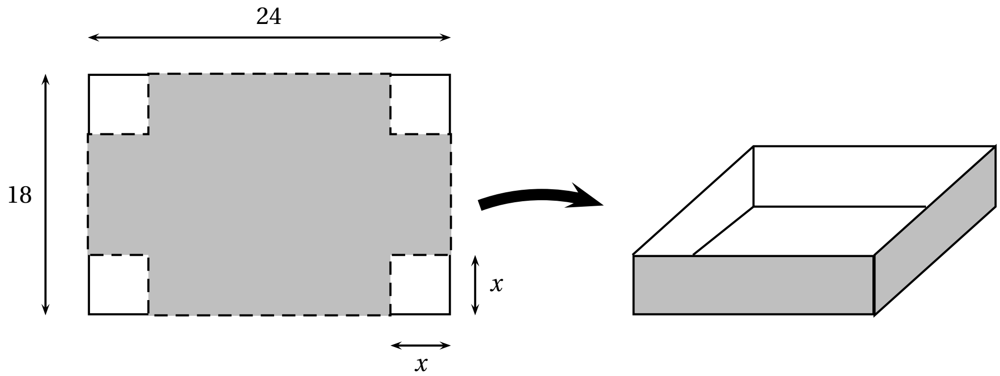
Alors le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ vaut :

a. 0	**b.** 5	**c.** 6	**d.** -6

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CB} = 3 \times 3 + 0 + 0 + 2 \times (-2) = 5.$

Exercice 2 **5 points**

Un industriel souhaite fabriquer une boîte sans couvercle à partir d'une plaque de métal de 18 cm de largeur et de 24 cm de longueur. Pour cela, il enlève des carrés dont la longueur du côté mesure x cm aux quatre coins de la pièce de métal et relève ensuite verticalement pour fermer les côtés.



Le volume de la boîte ainsi obtenue est une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,9]$ notée $V(x)$.

1. Justifier que pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,9]$: $V(x) = 4x^3 - 84x^2 + 432x$.
   La longueur est égale à $24 - 2x$ et la largeur $18 - 2x$. La hauteur valant x, le volume de la boîte sans couvercle est égale à :
   $V(x) = L \times l \times h = (24 - 2x)(18 - 2x) \times x = x\left(532 - 48x - 36x + 4x^2\right) = 4x^3 - 84x^2 + 432x.$
2. On note V' la fonction dérivée de V sur $[0\,;\,9]$.
   Donner l'expression de $V'(x)$ en fonction de x.
   La fonction polynôme V est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0\,;\,9]$, $V'(x) = 12x^2 - 168x + 432 = 12\left(x^2 - 14x + 36\right)$.
3. Dresser alors le tableau de variations de V en détaillant la démarche.
   Avec $\Delta = 14^2 - 4 \times 36 = 196 - 144 = 52$, le trinôme a deux racines :
   $x_1 = \dfrac{14 + \sqrt{52}}{2} = 7 + \sqrt{13}$ et $x_2 = \dfrac{14 - \sqrt{52}}{2} = 7 - \sqrt{13}$.
   On sait que ce trinôme est positif sauf sur $\left]7 - \sqrt{13}\,;\,7 + \sqrt{13}\right[$. Comme $\sqrt{13} \approx 3{,}6$, $7 + \sqrt{13} \approx 10{,}7$.
   - sur $\left]7 - \sqrt{13}\,;\,7 + \sqrt{13}\right[$, $V'(x) < 0$, donc V est décroissante ;
   - sur $\left[0\,;\,7 - \sqrt{13}\right]$ et sur $\left[7 + \sqrt{13}\right]$, $V'(x) > 0$, donc V est croissante.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x la contenance de la boîte est-elle maximale ?
   D'après la question précédente $V\left(7 - \sqrt{13}\right) \approx 654{,}977 \approx 655$ cm^3 est la contenance maximale de la boîte.

5. L'industriel peut-il construire ainsi une boîte dont la contenance est supérieure ou égale à 650 cm^3 ? Justifier.

Oui puisque la capacité maximale est proche de 655. Pour avoir une capacité de 650 cm^3, il faut prendre $x \approx 3{,}06$ cm.

Exercice 3 **5 points**

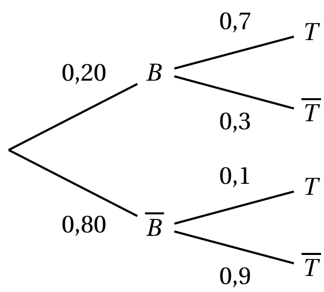
Une angine peut être provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne) soit par un virus (angine virale). On admet qu'un malade ne peut pas être à la fois porteur du virus et de la bactérie. L'angine est bactérienne dans 20 % des cas.
Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le résultat du test peut être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne mais il présente des risques d'erreur :

- si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30 % des cas
- si l'angine est virale, le test est positif dans 10 % des cas

On choisit au hasard un malade atteint d'angine. On note :
- B l'évènement : « l'angine est bactérienne » ;
- T l'évènement : « le test effectué sur le malade est positif ».

Si besoin, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.



2. Quelle est la probabilité que l'angine soit bactérienne et que le test soit positif ?

On a $P(B \cap T) = P(B) \times P_B(T) = 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}14$.

3. Montrer que la probabilité que le test soit positif est 0,22.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(T) = P(T \cap B) + P\left(T \cap \overline{B}\right) = 0{,}14 + 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}014 + 0{,}08 = 0{,}22.$

4. Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour que son angine soit bactérienne ?

Il faut calculer $P_T(B) = \dfrac{P(T \cap B)}{P(T)} = \dfrac{0{,}14}{0{,}22} = \dfrac{14}{22} = \dfrac{7}{11} \approx 0{,}636\,3 \approx 0{,}636$ au millième près.

Exercice 4 **5 points**

Un service de vidéos à la demande réfléchit au lancement d'une nouvelle série mise en ligne chaque semaine et qui aurait comme sujet le quotidien de jeunes gens favorisés.
Le nombre de visionnages estimé la première semaine est de 120 000. Ce nombre augmenterait ensuite de 2 % chaque semaine.
Les dirigeants souhaiteraient obtenir au moins 400 000 visionnages par semaine.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de visionnages n semaines après le début de la diffusion. On a donc $u_0 = 120000$.

1. Calculer le nombre u_1 de visionnages une semaine après le début de la diffusion.
   Augmenter de 2 %, revient à multiplier par $1 + \dfrac{2}{100} = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$.
   Donc $u_1 = u_0 \times 1{,}02 = 120000 \times ,02 = 122400$.
2. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 120000 \times 1{,}02^n$.
   La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme 120 000 et de raison 1,02.
   On sait qu'alors pour tout naturel$n$, $\quad u_n = 120000 \times 1{,}02^n$.
3. À partir de combien de semaines le nombre de visionnages hebdomadaire sera-t-il supérieur à 150 000 ?
   Il faut résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation :
   $120000 \times 1{,}02^n > 150000$. Donc $1{,}02^n > \dfrac{15}{12} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$.
   La calculatrice donne $u_{11} \approx 1{,}24$ et $u_{12} =\approx 1{,}26824$.
   Il y aura plus de 150 000 visionnages le 12^e^ jour.
4. Voici un algorithme écrit en langage Python :

```
def seuil():
  u = 120000
  n = 0
  while u < 400000:
    n = n+1
    u = 1.02*u
  return n
```

   Déterminer la valeur affichée par cet algorithme et interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.
   L'algorithme affichera 60.
   Cela signifie que la 60^e^ semaine il y aura plus de 400 000 visionnages
5. On pose pour tout entier naturel n : $S_n = u_0 + \ldots + u_n$. Montrer que l'on a :

$$S_n = 6000000 \times \left(1{,}02^{n+1} - 1\right).$$

   En déduire le nombre total de visionnages au bout de 52 semaines (arrondir à l'unité).
   $S_n = u_0 + \ldots + u_n = 120000 + 120000 \times 1{,}02^1 + 120000 \times 1{,}02^2 + \ldots + 120000 \times 1{,}02^n$ et
   $1{,}02S_n = 120000 \times 1{,}02^1 + 120000 \times 1{,}02^2 + \ldots + 120000 \times 1{,}02^{n+1}$, d'où par différence :
   $0{,}02S_n = 120000 \times 1{,}02^{n+1} - 120000$ et par conséquent en multipliant par 50 (inverse de 0,02)
   $S_n = 50 \times 120000\left(1{,}02^{n+1} - 1\right) = 6000000\left(1{,}02^{n+1} - 1\right)$.
   En particulier
   $S_{52} = 50 \times 120000\left(1{,}02^{53} - 1\right) = 6000000\left(1{,}02^{53} - 1\right) \approx 11138008{,}4$ soit environ 11 138 008 visionnages à l'unité près.