ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU

Spécialité « Mathématiques » – Sujet 3 – 2021

Classe de première – Corrigé

Exercice 1 — 5 points

Question 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbf{R}$. Sa fonction dérivée f' est donnée sur $\mathbf{R}$ par :

a. $f'(x) = x + 1$ **b.** $f'(x) = 2x + 1$ **c.** $f'(x) = 2x$ **d.** $f'(x) = 2x^2 + x$

Réponse b.

Question 2

La somme $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}$ est égale à :

a. $2^{10} - 1$ **b.** 2^{10} **c.** $2^{11} - 1$ **d.** 2^{11}

Il s'agit de calculer la somme des 11 premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 2$.

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} = 1 \times \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2^{11} - 1$$

Réponse c.

Question 3

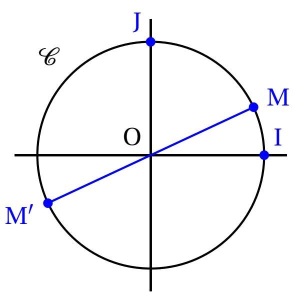
On considère l'équation $x^2 + 2x - 8 = 0$.
On note S la somme des racines de cette équation et P leur produit.
Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

a. $S = 2$ et $P = -8$ **b.** $S = -2$ et $P = -8$ **c.** $S = -2$ et $P = 8$ **d.** $S = 2$ et $P = 8$

D'après le cours, si le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ admet deux racines, leur somme est égale à $S = -\frac{b}{a}$ et leur produit est égal à $\frac{c}{a}$.
Ici $a = 1$, $b = 2$ et $c = -8$ donc $S = -2$ et $P = -8$.
Réponse b.

Question 4

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique.
Soit x un réel strictement positif et M le point de $\mathscr{C}$ associé au réel x.



Alors le point M′, symétrique de M par rapport à O, est associé au réel :

a. $-x$ **b.** $\pi + x$ **c.** $\pi - x$ **d.** $-\pi - x$

> Les points M et M′ sont diamétralement opposés sur le cercle trigonométrique, donc les réels qui leur sont associés ont une différence de π.
> **Réponse b.**

Question 4

Parmi les égalités suivantes, laquelle est vraie pour tout réel x ?

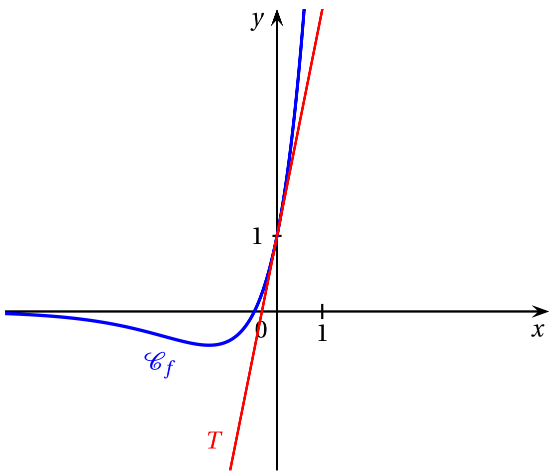
a. $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ **b.** $\sin(-x) = \sin(x)$

c. $\cos(-x) = -\cos(x)$ **d.** $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 2$

> La fonction cosinus est périodique de période 2π.
> **Réponse a.**

Exercice 2 **5 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (2x + 1)\,\mathrm{e}^x$.
Sur le graphique ci-dessous, sont tracées la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f, et la droite T, tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.



1. Les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses ont pour ordonnées 0 et pour abscisses les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f(x) = 0 \iff 2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$.
   Le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.
2. On utilise la formule de dérivation d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$.
   Pour tout x réel, $f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^x + (2x + 1) \times \mathrm{e}^x = (2 + 2x + 1)\,\mathrm{e}^x = (2x + 3)\,\mathrm{e}^x$.
3. On dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbf{R}$, puis on va préciser les variations de f sur $\mathbf{R}$.
   Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x + 3$ qui s'annule et change de signe pour $x = -\frac{3}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
		f est décroissante		f est croissante	

4. **a.** La tangente T au point de la courbe d'abscisse 0 a pour équation : $y = f(0)+f'(0)(x-0)$.
$f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{x}$ donc $f(0) = 1$, et $f'(x) = (2x+3)\,\mathrm{e}^{x}$ donc $f'(0) = 3$.
L'équation réduite de la tangente T est donc : $y = 3x+1$.

   b. D'après le graphique, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de la tangente T, sauf en leur point d'intersection de coordonnées $(0\,;\,1)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = (2x+1)\,\mathrm{e}^{x}$ et la tangente T a pour équation $y = 3x+1$.
Donc, pour tout réel x, on a : $(2x+1)\,\mathrm{e}^{x} \geqslant 3x+1$.

Exercice 3 — 5 points

Dans une école d'ingénieurs, certains étudiants s'occupent de la gestion des associations comme par exemple le BDS (bureau des sports).
Sur les cinq années d'études, le cycle « licence » dure les trois premières années, et les deux dernières années sont celles du cycle de « spécialisation ».
On constate que, dans cette école, il y a 40 % d'étudiants dans le cycle « licence » et 60 % dans le cycle de « spécialisation ».

- Parmi les étudiants du cycle « licence », 8 % sont membres du BDS;
- Parmi les étudiants du cycle de « spécialisation », 10 % sont membres du BDS.

On considère un étudiant de cette école choisi au hasard, et on considère les évènements suivants :

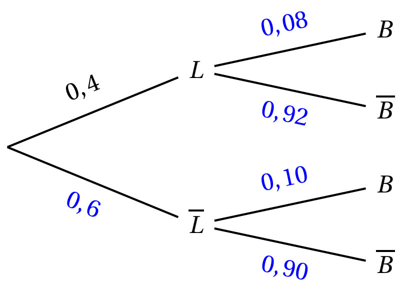
L : « L'étudiant est dans le cycle licence » ; $\overline{L}$ est son évènement contraire.

B : « L'étudiant est membre du BDS » ; $\overline{B}$ est son évènement contraire.

La probabilité d'un évènement A est notée $P(A)$.

Partie A

1. On complète l'arbre pondéré modélisant la situation.



2. La probabilité que l'étudiant choisi soit en cycle « licence » et membre du BDS est :
$P(L \cap B) = 0,4 \times 0,08 = 0,032$.
3. $P(B) = P(L \cap B) + P(\overline{L} \cap B) = 0,032 + 0,6 \times 0,1 = 0,092$.

Partie B

Le BDS décide d'organiser une randonnée en montagne. Cette sortie est proposée à tous les étudiants de cette école mais le prix qu'ils auront à payer pour y participer est variable. Il est de 60 € pour les étudiants qui ne sont pas membres du BDS, et de 20 € pour les étudiants qui sont membres du BDS.
On désigne par X la variable aléatoire donnant la somme à payer pour un étudiant qui désire faire cette randonnée.

1. Les valeurs prises par X sont 20 € et 60 €.

2. La somme à payer est de 20 € si l'étudiant est membre du BDS, c'est-à-dire avec une probabilité de $0,092$, ou de 50 € si l'étudiant n'est pas membre du BDS, c'est-à-dire avec une probabilité de $1-0,092=0,908$. D'où la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i en euro	20	60
$p_i=P(X=x_i)$	$0,092$	$0,908$

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est :
$E(X)=\sum(x_i\times p_i)=20\times0,092+60\times0,908=56,32$ €.

Exercice 4 — 5 points

Bob s'est fixé un objectif : participer à un marathon qui aura lieu très bientôt dans sa ville.
Pour cela, il désire programmer sa préparation au marathon de la manière suivante :

- lors du premier entraînement, il décide de courir 20 km ;
- il augmente ensuite, à chaque entraînement, la distance à courir de 5 %.

On peut modéliser la distance parcourue lors de ses entraînements par une suite (d_n), où, pour tout entier naturel n non nul, le nombre d_n désigne la distance à courir en kilomètre, lors de son n-ième entraînement. On a ainsi $d_1=20$.

1. $d_2=d_1+d_1\times\frac{5}{100}=20+20\times\frac{5}{100}=21$, et $d_3=d_2+d_2\times\frac{5}{100}=21+21\times\frac{5}{100}=22,05$.

2. On passe de d_n à d_{n+1} en ajoutant 5 %, donc en multipliant par $1+\frac{5}{100}=1,05$.
Donc pour tout entier naturel n non nul, $d_{n+1}=1,05\times d_n$

3. La suite (d_n) est donc géométrique de premier terme $d_1=20$, et de raison $q=1,05$.
On en déduit que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $d_n=d_1\times q^{n-1}=20\times1,05^{n-1}$.

4. La distance, arrondie à 1 m près, que va courir Bob lors de son 10^{e} entraînement est $d_{10}=20\times1,05^9$ soit $31,027$ km.

5. La distance à courir lors d'un marathon est de $42,195$ km. Bob estime qu'il sera prêt pour la course, s'il parvient à courir au moins 43 km lors d'un de ses entraînements.
On complète le script suivant, écrit en langage Python, dont la valeur de n, après exécution de ce script, est le nombre minimal d'entraînements permettant à Bob d'être prêt pour le marathon.

```
n = 1
d = 20
while d < 43 :
  n = n + 1
  d = 1.05*d
```