꩜ Baccalauréat Première Métropole-La Réunion Série n° 2 ꩜
série technologique e3c Corrigé du n° 2 année 2020

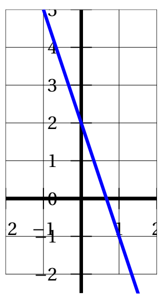
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - Première technologique

PARTIE I

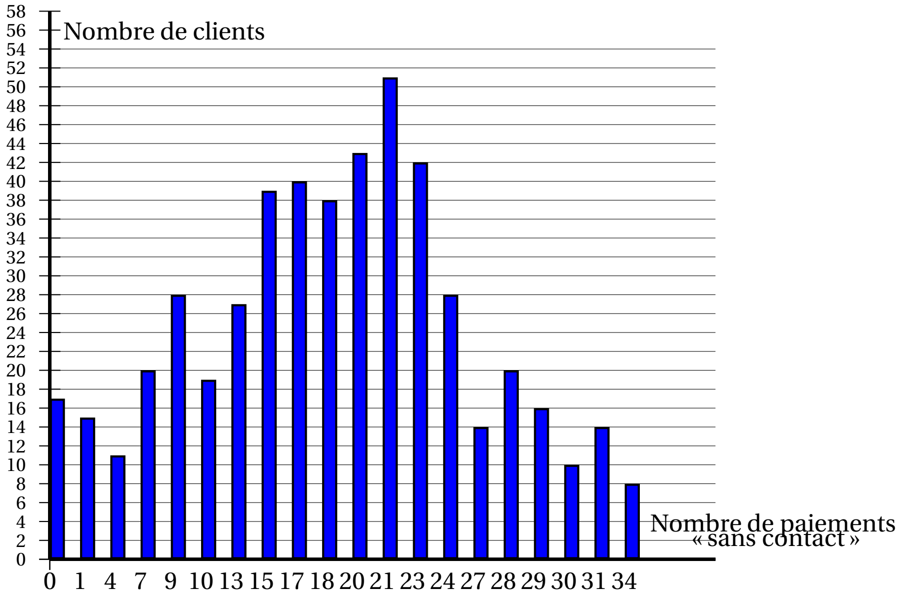
Exercice 1 **5 points**

Automatismes **Sans calculatrice** **Durée : 20 minutes**

Pour chaque question, indiquer la réponse dans la case correspondante.
Aucune justification n'est demandée.

	Énoncé	**Réponse**
1	Le prix d'un objet est passé de 30 euros à 36 euros. Calculer le taux d'évolution en pourcentage.	$\dfrac{36}{30} = \dfrac{12}{10} = 1,20$: le taux d'évolution est donc 20 %.
2	Par combien faut-il multiplier une quantité positive pour que celle-ci diminue de 15 % ?	Diminuer de 15 % revient à multiplier par $1 - \dfrac{15}{100} = \dfrac{85}{100} = 0,85$. Il faut donc multiplier par $0,85$.
3	Après une augmentation du prix de 10 %, un article est vendu 44 euros. Quel était le prix de départ ?	Augmenter de 10 % revient à multiplier par $1 + \dfrac{10}{100} = 1 + 0,10 = 1,10$. On a donc $x \times 1,1 = 44$, d'où $x = \dfrac{44}{1,1} = 40$. le prix initial était 40 €.
4	Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2(x-3)-4 = 7x$	$2(x-3)-4 = 7x$ donne $2x-6-4 = 7x$ ou $2x-10 = 7x$ ou $5x = -10$ et enfin $x = -2$. $S = \{-2\}$.
5	Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(x+1)^2 = 7$.	$(x+1)^2 = 7$ donne en développant $x^2+1+2x = 7$, soit $x^2+2x-6 = 0$. Avec $\Delta = 4+24 = 28 > 0$, on a donc deux solutions : $S = \left\{\dfrac{-2-\sqrt{28}}{2}\ ;\ \dfrac{-2+\sqrt{28}}{2}\right\}$
6	Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2(x-1) \leqslant 3x+8$	$2(x-1) \leqslant 3x+8$ ou $2x-2 \leqslant 3x+9$ ou $-11 \leqslant x$. $S =]-11\ ;\ +\infty[$.
7	Déterminer l'équation réduite de la droite Δ, représentée ci-dessous. 	On voit que la droite a un coefficient directeur égal à -3. Une de ses équations est donc $y = -3x+b$. Or la droite contient le point de coordonnées $(0\,;2)$, d'où $2 = -3\times 0 + b$ soit $b = 2$. Une équation de la droite est donc $y = -3x+2$.
8	Étudier le signe de l'expression $(10x-7)(-x+3)$ sur $\mathbb{R}$.	Un tableau de signes donne : $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & \frac{7}{10} & & 3 & & +\infty \\ \hline 10x-7 & & - & 0 & + & & + & \\ -x+3 & & + & & + & 0 & - & \\ (10x-7)(-x+3) & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array}$

Pour les questions 9 et 10, on considère la situation suivante :
Entre le 1[er] et le 8 mars 2020, une agence bancaire a étudié nombre de paiements effectués par 500 de ses clients en utilisant le mode « sans contact » de leur carte bancaire. Elle a obtenu le diagramme en barres ci-dessous.



9	Combien de clients ont effectué 28 paiements en utilisant le mode « sans contact » de leur carte bancaire entre le 1[er] et le 8 mars 2020 ?	20 clients ont effectué 28 paiements en utilisant le mode « sans contact »
10	Combien de clients ont effectué au moins 30 paiements en utilisant le mode « sans contact » de leur carte bancaire entre le 1[er] et le 8 mars 2020 ?	Il y a eu $15+17+18++20+21+23 = 114$ clients qui ont effectué au moins 30 paiements en utilisant le mode « sans contact ».

PARTIE II

Calculatrice autorisée

Cette partie est composée de trois exercices indépendants

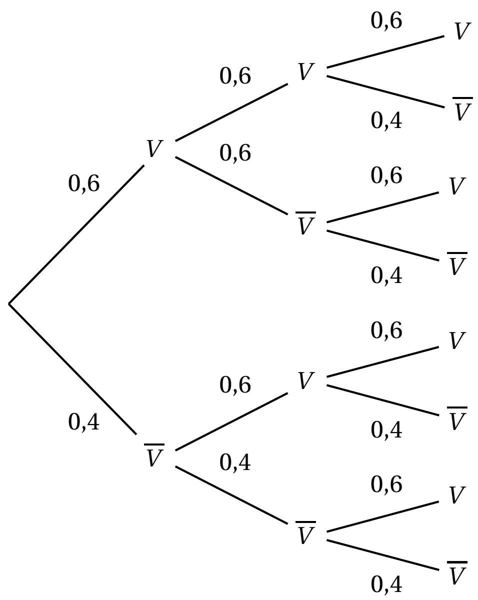
Exercice 2 **5 points**

1. Antonella prend tous les jours sa voiture pour se rendre au travail. Il rencontre sur son trajet 3 feux tricolores qui fonctionnent tous les trois de la même manière et de façon indépendante. Des relevés statistiques ont permis d'établir que pour chaque feu la probabilité qu'il soit vert lorsqu'Antonella s'y présente est égale à $0,6$.
V désigne l'évènement : « le feu est vert » et $\overline{V}$ l'évènement contraire.

a. Illustrer par un arbre de probabilité l'expérience aléatoire consistant à rencontrer successivement les trois feux. (voir ci-dessous)

b. Quelle est la probabilité qu'Antonella rencontre 3 feux verts ?
On a donc $P(V \cap V \cap V) = 0,6 \times 0,6 \times 0,6 \times = 0,216$.

c. Quelle est la probabilité qu'Antonella rencontre au moins un feu vert ?
La probabilité qu'elle ne rencontre aucun feu vert est :
$P\left(\overline{V} \cap \overline{V} \cap \overline{V}\right) = 0,4 \times 0,4 \times 0,4 = 0,064$, donc la probabilité qu'elle rencontre au moins un feu vert est
$P = 1 - 0,064 = 0,936$.



2. Une tombola a été organisée par l'Amicale des personnels de la société dans laquelle Antonella travaille. 200 billets ont été mis en vente et il sont été tous vendus.

   Chaque billet était vendu au tarif unique de 5 euros.

   Parmi ces 200 billets, un billet permet de gagner 100 euros, 5 billets permettent, chacun, de gagner 20 euros, 20 billets permettent, chacun, de gagner 5 euros et enfin les autres billets sont tous perdants.

   Soit X la variable aléatoire associant à chaque billet le gain algébrique du joueur. On rappelle que le gain algébrique est la différence entre le montant gagné à l'issue du jeu et la mise.

   a. Donner les différentes valeurs prises par X.

   X peut être égale à : 95 ; 15 ; 0 et −5.

   b. Déterminer la loi de probabilité de X.

X	95	15	0	-5
$P(X = x_i)$	$\dfrac{1}{200} = 0,005$	$\dfrac{5}{200} = 0,025$	$\dfrac{20}{200} = 0,1$	$\dfrac{174}{200} = 0,87$

   Non demandé : $E(X) = 95 \times \dfrac{1}{200} + 20 \times \dfrac{5}{200} + 0 \times \dfrac{1}{200} + (-5) \times \dfrac{174}{200} =$
   $(95 + 100 - 870) \times \dfrac{1}{200} = -\dfrac{675}{200} = -3,375 \approx -3,38$ (€).

   En moyenne, en achetant plusieurs billet la perte par billet sera de 3,38 €.

Exercice 3 **5 points**

Une entreprise fabrique x tonnes d'un certain produit, avec $x \in [0\ ;\ 20]$. Le coût total de production de x tonnes de produit, exprimé en milliers d'euros, est donné par :

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x.$$

1. On suppose que toute la production est vendue. La recette totale, exprimée en milliers d'euros, est donnée par la fonction r définie sur $[0; 20]$ par : $r(x) = 108x$.

   La fonction associée au bénéfice exprimé en milliers d'euros est donnée par la fonction B définie pour tout x de $[0; 20]$ par $B(x) = r(x) - C(x)$.

   Vérifier que pour tout réel x appartenant à $[0; 20]$, on a : $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 192x$.

   $B(x) = r(x) - C(x) = 108x - \left(x^3 - 30x^2 + 300x\right) = 108x - x^3 + 30x^2 - 300x = -x^3 + 30x^2 - 192x$

2. Montrer que pour tout x de $[0; 20]$, la fonction dérivée associée au bénéfice B admet comme expression $B'(x) = 3(4 - x)(x - 16)$.

   On a $B'(x) = -3x^2 + 60x - 192 = 3\left(-x^2 + 20x - 64\right)$.

   Pour le trinôme $-x^2 - 20x - 64$, on a $\Delta = 20^2 - 4 \times (-1) \times 64 = 400 - 256 = 144 = 12^2$.

Les racines du trinôme sont donc $x_1 = \dfrac{-20-12}{-2} = 16$ et $x_2 = \dfrac{-20+12}{-2} = 4$.

On a donc $B'(x) = 3(4-x)(x-16)$.

3. Dresser le tableau de variations sur $[0\,;\,20]$, de la fonction B.

On sait que le trinôme précédent est négatif sauf sur l'intervalle $[4\,;\,16]$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		4		16		20
$B'(x)$		$-$	0	+	0	$-$	
B	0	$\searrow$	-352	$\nearrow$	512	$\searrow$	160

4. En déduire la quantité que l'entreprise doit fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal.

Donner la valeur en milliers d'euros de ce bénéfice.

Pour obtenir un bénéfice maximal l'entreprise doit fabriquer et vendre 16 tonnes. Le bénéfice sera de 512 milliers d'euros.

5. Le directeur commercial de cette entreprise souhaite déterminer les quantités à produire et à vendre pour obtenir un bénéfice strictement positif. Il affirme que si l'entreprise fabrique et vend entre 8 et 20 tonnes de produit, alors son objectif est atteint, à savoir le bénéfice est strictement positif. Le chef de production quant à lui affirme qu'il faudrait fabriquer et vendre entre 10 et 20 tonnes pour atteindre l'objectif.

Pour chacune des deux affirmations, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

- On a $B(8) = -8^3 + 30 \times 8^2 - 192 \times 8 = -512 + 1920 - 1536 = -128$. Le directeur commercial se trompe.
- On a $B(10) = -10^3 + 30 \times 10^2 - 192 \times 10 = -1000 + 3000 - 1920 = 80$. Le chef de production a raison.

Exercice 4 **5 points**

L'objectif de cet exercice est de représenter en perspective cavalière la sculpture de Victor Vasarely représentée en photo ci-contre avec uniquement les cercles extérieurs sur chaque face visible.

La figure donnée en annexe, qui est à rendre avec la copie, représente le cube de Vasarely en perspective cavalière sur lequel sont représentées les cercles inscrits des faces ABFE et BCGF.

Cube C 1970
Aluminium poli et sérigraphié
$17,1 \times 17,1 \times 17,1$ cm
Victor Vasarely

1. Sur **la figure donnée en annexe**, on considère le cercle inscrit dans la face ABFE.

Tracer la tangente (t) en M à ce cercle et montrer que (t) et (BE) sont parallèles.

(BF) et (AF) sont perpendiculaires car diagonales d'un carré.

Or (t) tangente est perpendiculaire à (OM), donc (t) est parallèle à (BE).

2. Justifier que $\text{O}M = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{OA}$.

Avec X marqué sur la figure, on a OM = OX et en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OXA :

$\text{OX}^2 + \text{XA}^2 = \text{OA}^2 = 2\text{OX}^2$, d'où $\text{OX} = \text{OM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{OA}$.

3. Sur la face ABCD, construire le centre O′ de la face ABCD.

4. Le cercle inscrit dans la face ABCD coupe respectivement les segments [O′D], [O′C], [O′B] et [O′A] en M', N', P' et Q'.

   En utilisant les résultats établis dans la partie A et en effectuant les mesures nécessaires, construire ces points M', N', P' et Q'.

5. Tracer ensuite les tangentes au cercle inscrit dans la face ABCD en ces mêmes points en justifiant la construction, puis terminer le tracé de l'ellipse représentant le cercle inscrit dans le carré ABCD.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 4