Corrigé de l'exercice 1

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = 81\,x^2 - 81$
$= \left(\sqrt{81}\,x\right)^2 - \left(\sqrt{81}\right)^2$
$= \left(\sqrt{81}\,x\sqrt{81}\right) \times \left(\sqrt{81}\,x - \left(\sqrt{81}\right)\right)$
$= (9\,x + 9) \times (9\,x - 9)$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{-1}$ et $\boxed{1}$

$R(x) = 81\,x^2 + 54\,x + 9$
$= (9\,x)^2 + 2 \times 9\,x \times 3 + 3^2$
$= (9\,x + 3)^2$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{\dfrac{-1}{3}}$

$Q(x) = x^2 + 6\,x - 7$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = 1$, $b = 6$ et $c = -7$:

$\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times (-7)$
$\Delta = 36 - (-28)$
$\Delta = 64$

$x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{64}}{2 \times 1}$
$x_1 = \dfrac{-6 - 8}{2}$
$x_1 = \dfrac{-7 \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$
$x_1 = -7$

$x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{64}}{2 \times 1}$
$x_2 = \dfrac{-6 + 8}{2}$
$x_2 = 1$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{-7}$ et $\boxed{1}$

Corrigé de l'exercice 2

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = -5\,x^2 - 5$
$P(x) \leq -5$ car un carré est toujours positif.
$P(x)$ n'a donc pas de racine.

$R(x) = 9\,x^2 + 24\,x + 16$
$= (3\,x)^2 + 2 \times 3\,x \times 4 + 4^2$
$= (3\,x + 4)^2$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{\dfrac{-4}{3}}$

$Q(x) = x^2 - 6\,x + 5$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = 1$, $b = -6$ et $c = 5$:

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5$
$\Delta = 36 - 20$
$\Delta = 16$

$x_1 = \dfrac{6 - \sqrt{16}}{2 \times 1}$
$x_1 = \dfrac{6 - 4}{2}$
$x_1 = 1$

$x_2 = \dfrac{6 + \sqrt{16}}{2 \times 1}$
$x_2 = \dfrac{6 + 4}{2}$
$x_2 = \dfrac{5 \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$
$x_2 = 5$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{1}$ et $\boxed{5}$

Corrigé de l'exercice 3

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 36\,x^2 - 25 \\ &= \left(\sqrt{36}\,x\right)^2 - \left(\sqrt{25}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{36}\,x\sqrt{25}\right) \times \left(\sqrt{36}\,x - \left(\sqrt{25}\right)\right) \\ &= (6\,x+5) \times (6\,x-5) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\frac{-5}{6}}$ et $\boxed{\frac{5}{6}}$

$$\begin{aligned} R(x) &= -5\,x^2 + 1 \\ &= \left(\sqrt{1}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\,x\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{1}\sqrt{5}\,x\right) \times \left(\sqrt{1} - \left(\sqrt{5}\,x\right)\right) \\ &= \left(\sqrt{5}\,x+1\right) \times \left(1 - \left(\sqrt{5}\,x\right)\right) \\ &= \left(\sqrt{5}\,x+1\right) \times \left(-\sqrt{5}\,x+1\right) \end{aligned}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{\frac{-1}{\sqrt{5}}}$ et $\boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}$

$Q(x) = -x^2 + 2\,x + 1$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = -1$, $b = 2$ et $c = 1$:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2^2 - 4 \times (-1) \times 1 \\ \Delta &= 4 - (-4) \\ \Delta &= 8 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2\times(-1)} \qquad x_2 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2\times(-1)}$$

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{4}\times\sqrt{2}}{-2} \qquad x_2 = \frac{-2+\sqrt{4}\times\sqrt{2}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}} \qquad x_2 = \frac{\left(1-\sqrt{2}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}}$$

$$x_1 = 1+\sqrt{2} \qquad x_2 = 1-\sqrt{2}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{1+\sqrt{2}}$ et $\boxed{1-\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 4

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = x^2 + 12\,x + 9$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = 1$, $b = 12$ et $c = 9$:

$$\begin{aligned} \Delta &= 12^2 - 4 \times 1 \times 9 \\ \Delta &= 144 - 36 \\ \Delta &= 108 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-12-\sqrt{108}}{2\times1} \qquad x_2 = \frac{-12+\sqrt{108}}{2\times1}$$

$$x_1 = \frac{-12-\sqrt{36}\times\sqrt{3}}{2} \qquad x_2 = \frac{-12+\sqrt{36}\times\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\left(-6-3\sqrt{3}\right)\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}} \qquad x_2 = \frac{\left(-6+3\sqrt{3}\right)\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}}$$

$$x_1 = -6-3\sqrt{3} \qquad x_2 = -6+3\sqrt{3}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{-6-3\sqrt{3}}$ et $\boxed{-6+3\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 4\,x^2 - 16\,x + 16 \\ &= (2\,x)^2 - 2 \times 2\,x \times 4 + 4^2 \\ &= (2\,x-4)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $Q(x)$ est $\boxed{2}$

$$\begin{aligned} R(x) &= 49\,x^2 - 81 \\ &= \left(\sqrt{49}\,x\right)^2 - \left(\sqrt{81}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{49}\,x\sqrt{81}\right) \times \left(\sqrt{49}\,x - \left(\sqrt{81}\right)\right) \\ &= (7\,x+9) \times (7\,x-9) \end{aligned}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{\frac{-9}{7}}$ et $\boxed{\frac{9}{7}}$

Corrigé de l'exercice 5

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = x^2 - 10x + 9$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = 1$, $b = -10$ et $c = 9$:

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 9$$
$$\Delta = 100 - 36$$
$$\Delta = 64$$

$$x_1 = \frac{10 - \sqrt{64}}{2 \times 1}$$
$$x_1 = \frac{10 - 8}{2}$$
$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{10 + \sqrt{64}}{2 \times 1}$$
$$x_2 = \frac{10 + 8}{2}$$
$$x_2 = \frac{9 \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$$
$$x_2 = 9$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{1}$ et $\boxed{9}$

$$Q(x) = 3x^2 + 2x$$
$$= x \times (3x + 2)$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{-2}{3}}$

$R(x) = 5x^2 + 3$
$R(x) \geq 3$ car un carré est toujours positif.
$R(x)$ n'a donc pas de racine.

Corrigé de l'exercice 6

Déterminer les racines des polynômes :

$$P(x) = 36x^2 - 81$$
$$= \left(\sqrt{36}\,x\right)^2 - \left(\sqrt{81}\right)^2$$
$$= \left(\sqrt{36}\,x\sqrt{81}\right) \times \left(\sqrt{36}\,x - \left(\sqrt{81}\right)\right)$$
$$= (6x + 9) \times (6x - 9)$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-3}{2}}$ et $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

$$R(x) = -6x^2 + x$$
$$= x \times (-6x + 1)$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

$Q(x) = -x^2 - 18x - 6$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = -1$, $b = -18$ et $c = -6$:

$$\Delta = (-18)^2 - 4 \times (-1) \times (-6)$$
$$\Delta = 324 - 24$$
$$\Delta = 300$$

$$x_1 = \frac{18 - \sqrt{300}}{2 \times (-1)}$$
$$x_1 = \frac{18 - \sqrt{100} \times \sqrt{3}}{-2}$$
$$x_1 = \frac{\left(-9 + 5\sqrt{3}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$$
$$x_1 = -9 + 5\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{18 + \sqrt{300}}{2 \times (-1)}$$
$$x_2 = \frac{18 + \sqrt{100} \times \sqrt{3}}{-2}$$
$$x_2 = \frac{\left(-9 - 5\sqrt{3}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$$
$$x_2 = -9 - 5\sqrt{3}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{-9 + 5\sqrt{3}}$ et $\boxed{-9 - 5\sqrt{3}}$