Corrigé de l'exercice 1

Déterminer les racines des polynômes :

$P\left(x\right)=-x^2-8\,x+9$ On calcule le discriminant de $P\left(x\right)$ avec $a=-1$, $b=-8$ et $c=9$:

$$\begin{aligned}\Delta&=(-8)^2-4\times(-1)\times 9\\ \Delta&=64-(-36)\\ \Delta&=100\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{8-\sqrt{100}}{2\times(-1)}\\ x_1&=\frac{8-10}{-2}\\ x_1&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2&=\frac{8+\sqrt{100}}{2\times(-1)}\\ x_2&=\frac{8+10}{-2}\\ x_2&=\frac{-9\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}}\\ x_2&=-9\end{aligned}$$

Les racines de $P\left(x\right)$ sont $\boxed{1}$ et $\boxed{-9}$

$$\begin{aligned}Q\left(x\right)&=9\,x^2+54\,x+81\\ &=(3\,x)^2+2\times 3\,x\times 9+9^2\\ &=(3\,x+9)^2\end{aligned}$$

L'unique racine de $Q\left(x\right)$ est $\boxed{-3}$

$R\left(x\right)=5\,x^2+8$
$R\left(x\right)\geq 8$ car un carré est toujours positif.
$R\left(x\right)$ n'a donc pas de racine.

Corrigé de l'exercice 2

Déterminer les racines des polynômes :

$P\left(x\right)=-x^2-6\,x-8$ On calcule le discriminant de $P\left(x\right)$ avec $a=-1$, $b=-6$ et $c=-8$:

$$\begin{aligned}\Delta&=(-6)^2-4\times(-1)\times(-8)\\ \Delta&=36-32\\ \Delta&=4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{6-\sqrt{4}}{2\times(-1)}\\ x_1&=\frac{6-2}{-2}\\ x_1&=\frac{-2\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}}\\ x_1&=-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2&=\frac{6+\sqrt{4}}{2\times(-1)}\\ x_2&=\frac{6+2}{-2}\\ x_2&=\frac{-4\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}}\\ x_2&=-4\end{aligned}$$

Les racines de $P\left(x\right)$ sont $\boxed{-2}$ et $\boxed{-4}$

$$\begin{aligned}Q\left(x\right)&=4\,x^2+20\,x+25\\ &=(2\,x)^2+2\times 2\,x\times 5+5^2\\ &=(2\,x+5)^2\end{aligned}$$

L'unique racine de $Q\left(x\right)$ est $\boxed{\dfrac{-5}{2}}$

$$\begin{aligned}R\left(x\right)&=49\,x^2-1\\ &=\left(\sqrt{49}\,x\right)^2-\left(\sqrt{1}\right)^2\\ &=\left(\sqrt{49}\,x\sqrt{1}\right)\times\left(\sqrt{49}\,x-\left(\sqrt{1}\right)\right)\\ &=(7\,x+1)\times(7\,x-1)\end{aligned}$$

Les racines de $R\left(x\right)$ sont $\boxed{\dfrac{-1}{7}}$ et $\boxed{\dfrac{1}{7}}$

Corrigé de l'exercice 3

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = 36\,x^2 - 4$
$= \left(\sqrt{36}\,x\right)^2 - \left(\sqrt{4}\right)^2$
$= \left(\sqrt{36}\,x\sqrt{4}\right) \times \left(\sqrt{36}\,x - \left(\sqrt{4}\right)\right)$
$= (6\,x + 2) \times (6\,x - 2)$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-1}{3}}$ et $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

$Q(x) = -5\,x^2 - x$
$= -x \times (5\,x + 1)$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{-1}{5}}$

$R(x) = -x^2 - 10\,x + 2$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = -1$, $b = -10$ et $c = 2$:

$\Delta = (-10)^2 - 4 \times (-1) \times 2$
$\Delta = 100 - (-8)$
$\Delta = 108$

$x_1 = \dfrac{10 - \sqrt{108}}{2 \times (-1)}$
$x_1 = \dfrac{10 - \sqrt{36} \times \sqrt{3}}{-2}$
$x_1 = \dfrac{\left(-5 + 3\sqrt{3}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_1 = -5 + 3\sqrt{3}$

$x_2 = \dfrac{10 + \sqrt{108}}{2 \times (-1)}$
$x_2 = \dfrac{10 + \sqrt{36} \times \sqrt{3}}{-2}$
$x_2 = \dfrac{\left(-5 - 3\sqrt{3}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_2 = -5 - 3\sqrt{3}$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{-5 + 3\sqrt{3}}$ et $\boxed{-5 - 3\sqrt{3}}$

Corrigé de l'exercice 4

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = 25\,x^2 - 20\,x + 4$
$= (5\,x)^2 - 2 \times 5\,x \times 2 + 2^2$
$= (5\,x - 2)^2$

L'unique racine de $P(x)$ est $\boxed{\dfrac{2}{5}}$

$R(x) = 4\,x^2 + 5$
$R(x) \geq 5$ car un carré est toujours positif.
$R(x)$ n'a donc pas de racine.

$Q(x) = -x^2 - 10\,x - 7$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = -1$, $b = -10$ et $c = -7$:

$\Delta = (-10)^2 - 4 \times (-1) \times (-7)$
$\Delta = 100 - 28$
$\Delta = 72$

$x_1 = \dfrac{10 - \sqrt{72}}{2 \times (-1)}$
$x_1 = \dfrac{10 - \sqrt{36} \times \sqrt{2}}{-2}$
$x_1 = \dfrac{\left(-5 + 3\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_1 = -5 + 3\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{10 + \sqrt{72}}{2 \times (-1)}$
$x_2 = \dfrac{10 + \sqrt{36} \times \sqrt{2}}{-2}$
$x_2 = \dfrac{\left(-5 - 3\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_2 = -5 - 3\sqrt{2}$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{-5 + 3\sqrt{2}}$ et $\boxed{-5 - 3\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 5

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = -x^2 - 4\,x + 8$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = -1$, $b = -4$ et $c = 8$:

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) \times 8$
$\Delta = 16 - (-32)$
$\Delta = 48$

$x_1 = \dfrac{4-\sqrt{48}}{2\times(-1)}$
$x_1 = \dfrac{4-\sqrt{16}\times\sqrt{3}}{-2}$
$x_1 = \dfrac{\left(-2+2\sqrt{3}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}}$
$x_1 = -2+2\sqrt{3}$

$x_2 = \dfrac{4+\sqrt{48}}{2\times(-1)}$
$x_2 = \dfrac{4+\sqrt{16}\times\sqrt{3}}{-2}$
$x_2 = \dfrac{\left(-2-2\sqrt{3}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}}$
$x_2 = -2-2\sqrt{3}$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{-2+2\sqrt{3}}$ et $\boxed{-2-2\sqrt{3}}$

$Q(x) = 7x^2 - 8$
$= \left(\sqrt{7}\,x\right)^2 - \left(\sqrt{8}\right)^2$
$= \left(\sqrt{7}\,x\sqrt{8}\right) \times \left(\sqrt{7}\,x - \left(\sqrt{8}\right)\right)$
$= \left(\sqrt{7}\,x + \left(\sqrt{4}\times\sqrt{2}\right)\right) \times \left(\sqrt{7}\,x - \left(\sqrt{4}\times\sqrt{2}\right)\right)$
$= \left(\sqrt{7}\,x + \left(\sqrt{4}\times\sqrt{2}\right)\right) \times \left(\sqrt{7}\,x - \left(2\sqrt{2}\right)\right)$
$= \left(\sqrt{7}\,x + \left(\sqrt{4}\times\sqrt{2}\right)\right) \times \left(\sqrt{7}\,x - 2\sqrt{2}\right)$
$= \left(\sqrt{7}\,x + 2\sqrt{2}\right) \times \left(\sqrt{7}\,x - 2\sqrt{2}\right)$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}}$ et $\boxed{\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}}$

$R(x) = -4x^2 - 9x$
$= -x \times (4x+9)$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{-9}{4}}$

Corrigé de l'exercice 6

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = x^2 - 81$
$= \left(\sqrt{1}\,x\right)^2 - \left(\sqrt{81}\right)^2$
$= \left(\sqrt{1}\,x\sqrt{81}\right) \times \left(\sqrt{1}\,x - \left(\sqrt{81}\right)\right)$
$= (x+9)\times(x-9)$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{-9}$ et $\boxed{9}$

$Q(x) = 8x^2 + 8x$
$= 8x \times (x+1)$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{-1}$

$R(x) = x^2 + 14x + 1$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = 1$, $b = 14$ et $c = 1$:

$\Delta = 14^2 - 4 \times 1 \times 1$
$\Delta = 196 - 4$
$\Delta = 192$

$x_1 = \dfrac{-14-\sqrt{192}}{2\times1}$
$x_1 = \dfrac{-14-\sqrt{64}\times\sqrt{3}}{2}$
$x_1 = \dfrac{\left(-7-4\sqrt{3}\right)\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}}$
$x_1 = -7-4\sqrt{3}$

$x_2 = \dfrac{-14+\sqrt{192}}{2\times1}$
$x_2 = \dfrac{-14+\sqrt{64}\times\sqrt{3}}{2}$
$x_2 = \dfrac{\left(-7+4\sqrt{3}\right)\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}}$
$x_2 = -7+4\sqrt{3}$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{-7-4\sqrt{3}}$ et $\boxed{-7+4\sqrt{3}}$