

Corrigé de l'exercice 1

►1. On considère la fonction f définie sur $I = [-1 ; 10]$ par $f(x) = \frac{2x - 4}{2x + 4}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I . Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $2x + 4 = 0$.

$$2x + 4 = 0$$

$$2x = -4$$

$$x = \frac{-4}{2}$$

$$x = -2$$

Or -2 n'est pas dans l'intervalle $[-1 ; 10]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I .

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in [-1 ; 10]$.

$$f'(x) = \frac{2 \times (2x + 4) - (2x - 4) \times 2}{(2x + 4)^2} = \frac{16}{(2x + 4)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I .

Comme $(2x + 4)^2$ est un carré, il est toujours positif.

De plus, $16 > 0$ donc pour tout x de I , $f'(x) > 0$.

x	-1	10
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-3	$\frac{2}{3}$

►2. Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = 3x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 378x + 6$ sur $[-10 ; 10]$.

$$h'(x) = 9x^2 - 9x - 378$$

Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 9 \times (-378) = 13\,689$ et $\sqrt{13\,689} = 117$.

Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-9) - \sqrt{13\,689}}{2 \times 9} &= \frac{9 - \sqrt{13\,689}}{18} & \frac{-(-9) + \sqrt{13\,689}}{2 \times 9} &= \frac{9 + \sqrt{13\,689}}{18} \\ &= \frac{9 - 117}{18} & &= \frac{9 + 117}{18} \\ &= \frac{-108}{18} & &= \frac{126}{18} \\ &= -6 & &= 7 \end{aligned}$$

Les racines de h' sont $x_1 = -6$ et $x_2 = 7$.

Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10	-6	7	10	
$h'(x)$	+	0	-	0	+

On obtient ainsi le tableau de variation de h .

x	-10	-6	7	10			
$h'(x)$		+	0	-	0	+	
$h(x)$	336	↗	1 464	↘	$-\frac{3 663}{2}$	↗	-1 224

Corrigé de l'exercice 2

►1. On considère la fonction k définie sur $I = [0 ; 10]$ par $k(x) = \frac{x-4}{-x-1}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I . Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-x-1=0$.

$$\begin{aligned} -x-1 &= 0 \\ -x &= 1 \\ x &= \frac{1}{-1} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Or -1 n'est pas dans l'intervalle $[0 ; 10]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I .

b) Déterminer $k'(x)$ pour tout $x \in [0 ; 10]$.

$$k'(x) = \frac{11 \times (-x-1) - (x-4) \times (-11)}{(-x-1)^2} = \frac{-5}{(-x-1)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I .

Comme $(-x-1)^2$ est un carré, il est toujours positif.

De plus, $-5 < 0$ donc pour tout x de I , $k'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	0	10	
$k'(x)$		-	
$k(x)$	4	↘	$-\frac{6}{11}$

►2. Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 60x - 4$ sur $[-10 ; 10]$.

$$g'(x) = 3x^2 - 3x - 60$$

Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 \times (-60) = 729$ et $\sqrt{729} = 27$.

Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-3) - \sqrt{729}}{2 \times 3} &= \frac{3 - \sqrt{729}}{6} & \frac{-(-3) + \sqrt{729}}{2 \times 3} &= \frac{3 + \sqrt{729}}{6} \\ &= \frac{3 - 27}{6} & &= \frac{3 + 27}{6} \\ &= \frac{-24}{6} & &= \frac{30}{6} \\ &= -4 & &= 5 \end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = -4$ et $x_2 = 5$.

Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10	-4	5	10	
$g'(x)$	+	0	-	0	+

On obtient ainsi le tableau de variation de g .

x	-10	-4	5	10	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	-554	148	$-\frac{433}{2}$	246	

Corrigé de l'exercice 3

►1. On considère la fonction k définie sur $I = [-10 ; 0]$ par $k(x) = \frac{-2x+2}{5x-1}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I . Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $5x - 1 = 0$.

$$5x - 1 = 0$$

$$5x = 1$$

$$x = \frac{1}{5}$$

Or $\frac{1}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10 ; 0]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I .

b) Déterminer $k'(x)$ pour tout $x \in [-10 ; 0]$.

$$k'(x) = \frac{(-2) \times (5x - 1) - (-2x + 2) \times 5}{(5x - 1)^2} = \frac{-8}{(5x - 1)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I .

Comme $(5x - 1)^2$ est un carré, il est toujours positif.

De plus, $-8 < 0$ donc pour tout x de I , $k'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	-10	0
$k'(x)$	-	
$k(x)$	$-\frac{22}{51}$	-2

►2. Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = x^3 + 15x^2 + 63x - 5$ sur $[-10 ; 10]$.

$$p'(x) = 3x^2 + 30x + 63$$

Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = 30^2 - 4 \times 3 \times 63 = 144$ et $\sqrt{144} = 12$.

Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-30 - \sqrt{144}}{2 \times 3} &= \frac{-30 - \sqrt{144}}{6} & \frac{-30 + \sqrt{144}}{2 \times 3} &= \frac{-30 + \sqrt{144}}{6} \\ &= \frac{-30 - 12}{6} & &= \frac{-30 + 12}{6} \\ &= \frac{-42}{6} & &= \frac{-18}{6} \\ &= -7 & &= -3 \end{aligned}$$

Les racines de p' sont $x_1 = -7$ et $x_2 = -3$.

Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10	-7	-3	10	
$p'(x)$	+	0	-	0	+

On obtient ainsi le tableau de variation de p .

x	-10	-7	-3	10	
$p'(x)$	+	0	-	0	+
$p(x)$	-135	-54	-86	3 125	

Corrigé de l'exercice 4

►1. On considère la fonction h définie sur $I = [-1 ; 10]$ par $h(x) = \frac{-3x + 7}{5x + 6}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I . Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $5x + 6 = 0$.

$$\begin{aligned} 5x + 6 &= 0 \\ 5x &= -6 \\ x &= \frac{-6}{5} \end{aligned}$$

Or $-\frac{6}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[-1 ; 10]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I .

b) Déterminer $h'(x)$ pour tout $x \in [-1 ; 10]$.

$$h'(x) = \frac{(-3) \times (5x + 6) - (-3x + 7) \times 5}{(5x + 6)^2} = \frac{-53}{(5x + 6)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I .

Comme $(5x + 6)^2$ est un carré, il est toujours positif.

De plus, $-53 < 0$ donc pour tout x de I , $h'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	-1	10
$h'(x)$	-	
$h(x)$	10	$-\frac{23}{56}$

- 2. Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = 3x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 36x - 5$ sur $[-10 ; 10]$.

$$h'(x) = 9x^2 - 45x + 36$$

Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = (-45)^2 - 4 \times 9 \times 36 = 729$ et $\sqrt{729} = 27$.

Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-45) - \sqrt{729}}{2 \times 9} &= \frac{45 - \sqrt{729}}{18} & \frac{-(-45) + \sqrt{729}}{2 \times 9} &= \frac{45 + \sqrt{729}}{18} \\ &= \frac{45 - 27}{18} & &= \frac{45 + 27}{18} \\ &= \frac{18}{18} & &= \frac{72}{18} \\ &= 1 & &= 4 \end{aligned}$$

Les racines de h' sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 4$.

Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10	1	4	10	
$h'(x)$	+	0	-	0	+

On obtient ainsi le tableau de variation de h .

x	-10	1	4	10	
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	-5 615	$\frac{23}{2}$	-29	1 105	

Corrigé de l'exercice 5

- 1. On considère la fonction f définie sur $I = [-10 ; 0]$ par $f(t) = \frac{-3t - 9}{5t - 2}$.

- a) Justifier que f est définie et dérivable sur I . Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $5t - 2 = 0$.

$$5t - 2 = 0$$

$$5t = 2$$

$$t = \frac{2}{5}$$

Or $\frac{2}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10 ; 0]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I .

- b) Déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in [-10 ; 0]$.

$$f'(t) = \frac{(-3) \times (5t - 2) - (-3t - 9) \times 5}{(5t - 2)^2} = \frac{51}{(5t - 2)^2}$$

- c) En déduire le sens de variations de f sur I .

Comme $(5t - 2)^2$ est un carré, il est toujours positif.

De plus, $51 > 0$ donc pour tout t de I , $f'(t) > 0$.

t	-10	0
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\frac{21}{52}$	$\frac{9}{2}$

- 2. Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = x^3 - 21x^2 + 144x + 7$ sur $[-10 ; 10]$.

$$q'(x) = 3x^2 - 42x + 144$$

Je dois étudier le signe de $q'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = (-42)^2 - 4 \times 3 \times 144 = 36$ et $\sqrt{36} = 6$.

Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-42) - \sqrt{36}}{2 \times 3} &= \frac{42 - \sqrt{36}}{6} & \frac{-(-42) + \sqrt{36}}{2 \times 3} &= \frac{42 + \sqrt{36}}{6} \\ &= \frac{42 - 6}{6} & &= \frac{42 + 6}{6} \\ &= \frac{36}{6} & &= \frac{48}{6} \\ &= 6 & &= 8 \end{aligned}$$

Les racines de q' sont $x_1 = 6$ et $x_2 = 8$.

Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10	6	8	10	
$q'(x)$	+	0	-	0	+

On obtient ainsi le tableau de variation de q .

x	-10	6	8	10	
$q'(x)$	+	0	-	0	+
$q(x)$	-4533	331	327	347	