

Corrigé de l'exercice 1

►1. On considère la fonction g définie sur $I = [0 ; 10]$ par $g(t) = \frac{t+6}{2t+1}$.

a) Justifier que g est définie et dérivable sur I . Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $2t+1=0$.

$$\begin{aligned} 2t+1 &= 0 \\ 2t &= -1 \\ t &= \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

Or $-\frac{1}{2}$ n'est pas dans l'intervalle $[0 ; 10]$ et comme g est un quotient de polynômes, alors g est définie et dérivable sur I .

b) Déterminer $g'(t)$ pour tout $t \in [0 ; 10]$.

$$g'(t) = \frac{11 \times (2t+1) - (t+6) \times 2}{(2t+1)^2} = \frac{-11}{(2t+1)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de g sur I .

Comme $(2t+1)^2$ est un carré, il est toujours positif.

De plus, $-11 < 0$ donc pour tout t de I , $g'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	0	10
$g'(x)$	-	
$g(x)$	6	$\frac{16}{21}$

►2. Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 7$ sur $[-10 ; 10]$.

$$p'(x) = 6x^2 - 12x + 6$$

Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

$$\text{Je calcule } \Delta = (-12)^2 - 4 \times 6 \times 6 = 0.$$

Comme $\Delta = 0$, $p'(x)$ a une seule racine $x_0 = \frac{-(-12)}{2 \times 6} = 1$.

Comme $\Delta = 0$, $p'(x)$ s'annule une seule fois pour $x_0 = 1$ et est toujours du signe de a .

x	-10	1	10
$p'(x)$	+	0	+

Donc la fonction polynômiale p est croissante sur $[-10 ; 10]$.

Corrigé de l'exercice 2

►1. On considère la fonction k définie sur $I = [-10 ; 8]$ par $k(t) = \frac{2t+8}{t-9}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I . Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $t-9=0$.

$$\begin{aligned} t-9 &= 0 \\ t &= 9 \end{aligned}$$

Or 9 n'est pas dans l'intervalle $[-10 ; 8]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I .

b) Déterminer $k'(t)$ pour tout $t \in [-10 ; 8]$.

$$k'(t) = \frac{2 \times (t - 9) - (2t + 8) \times 11}{(t - 9)^2} = \frac{-26}{(t - 9)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I .

Comme $(t - 9)^2$ est un carré, il est toujours positif.

De plus, $-26 < 0$ donc pour tout t de I , $k'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	-10	8
$k'(x)$	-	
$k(x)$	$\frac{12}{19}$	-24

►2. Étudier le sens de variations de f définie par $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ sur $[-10 ; 10]$.

$$f'(x) = 3x^2 + 3x$$

Je dois étudier le signe de $f'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times 0 = 9$ et $\sqrt{9} = 3$.

Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-3 - \sqrt{9}}{2 \times 3} &= \frac{-3 - \sqrt{9}}{6} & \frac{-3 + \sqrt{9}}{2 \times 3} &= \frac{-3 + \sqrt{9}}{6} \\ &= \frac{-3 - 3}{6} & &= \frac{-3 + 3}{6} \\ &= \frac{-6}{6} & &= \frac{0}{6} \\ &= -1 & &= 0 \end{aligned}$$

Les racines de f' sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 0$.

Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10	-1	0	10	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

On obtient ainsi le tableau de variation de f .

x	-10	-1	0	10	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-849	$\frac{3}{2}$	1	1 151	

Corrigé de l'exercice 3

►1. On considère la fonction k définie sur $I = [-10 ; 1]$ par $k(t) = \frac{2t - 7}{4t - 6}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I . Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $4t - 6 = 0$.

$$4t - 6 = 0$$

$$4t = 6$$

$$t = \frac{6}{4}$$

Or $\frac{3}{2}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10 ; 1]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I .

b) Déterminer $k'(t)$ pour tout $t \in [-10 ; 1]$.

$$k'(t) = \frac{2 \times (4t - 6) - (2t - 7) \times 4}{(4t - 6)^2} = \frac{16}{(4t - 6)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I .

Comme $(4t - 6)^2$ est un carré, il est toujours positif.

De plus, $16 > 0$ donc pour tout t de I , $k'(t) > 0$.

t	-10	1
$k'(x)$	+	
$k(x)$	$\frac{27}{46}$	$\frac{5}{2}$

►2. Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = 2x^3 - 27x^2 + 48x + 10$ sur $[-10 ; 10]$.

$$h'(x) = 6x^2 - 54x + 48$$

Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = (-54)^2 - 4 \times 6 \times 48 = 1764$ et $\sqrt{1764} = 42$.

Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-54) - \sqrt{1764}}{2 \times 6} &= \frac{54 - \sqrt{1764}}{12} & \frac{-(-54) + \sqrt{1764}}{2 \times 6} &= \frac{54 + \sqrt{1764}}{12} \\ &= \frac{54 - 42}{12} & &= \frac{54 + 42}{12} \\ &= \frac{12}{12} & &= \frac{96}{12} \\ &= 1 & &= 8 \end{aligned}$$

Les racines de h' sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 8$.

Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10	1	8	10	
$h'(x)$	+	0	-	0	+

On obtient ainsi le tableau de variation de h .

x	-10	1	8	10	
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	-5170	33	-310	-210	

Corrigé de l'exercice 4

►1. On considère la fonction h définie sur $I = [-10 ; -1]$ par $h(t) = \frac{-t - 8}{-2t + 1}$.

- a) Justifier que h est définie et dérivable sur I . Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-2t + 1 = 0$.

$$-2t + 1 = 0$$

$$-2t = -1$$

$$t = \frac{-1}{-2}$$

Or $\frac{1}{2}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10 ; -1]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I .

- b) Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in [-10 ; -1]$.

$$h'(t) = \frac{(-11) \times (-2t + 1) - (-t - 8) \times (-2)}{(-2t + 1)^2} = \frac{-17}{(-2t + 1)^2}$$

- c) En déduire le sens de variations de h sur I .

Comme $(-2t + 1)^2$ est un carré, il est toujours positif.

De plus, $-17 < 0$ donc pour tout t de I , $h'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	-10	-1
$h'(x)$	-	
$h(x)$	$\frac{2}{21}$	$-\frac{7}{3}$

- 2. Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = x^3 + 3x^2 - 72x - 5$ sur $[-10 ; 10]$.

$$p'(x) = 3x^2 + 6x - 72$$

Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-72) = 900$ et $\sqrt{900} = 30$.

Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-6 - \sqrt{900}}{2 \times 3} &= \frac{-6 - \sqrt{900}}{6} & \frac{-6 + \sqrt{900}}{2 \times 3} &= \frac{-6 + \sqrt{900}}{6} \\ &= \frac{-6 - 30}{6} & &= \frac{-6 + 30}{6} \\ &= \frac{-36}{6} & &= \frac{24}{6} \\ &= -6 & &= 4 \end{aligned}$$

Les racines de p' sont $x_1 = -6$ et $x_2 = 4$.

Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10	-6	4	10	
$p'(x)$	+	0	-	0	+

On obtient ainsi le tableau de variation de p .

x	-10	-6	4	10	
$p'(x)$	+	0	-	0	+
$p(x)$	15	319	-181	575	

Corrigé de l'exercice 5

►1. On considère la fonction h définie sur $I = [-10 ; 2]$ par $h(t) = \frac{5t - 4}{3t - 7}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I . Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $3t - 7 = 0$.

$$\begin{aligned} 3t - 7 &= 0 \\ 3t &= 7 \\ t &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Or $\frac{7}{3}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10 ; 2]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I .

b) Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in [-10 ; 2]$.

$$h'(t) = \frac{5 \times (3t - 7) - (5t - 4) \times 3}{(3t - 7)^2} = \frac{-23}{(3t - 7)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I .

Comme $(3t - 7)^2$ est un carré, il est toujours positif.

De plus, $-23 < 0$ donc pour tout t de I , $h'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	-10	2
$h'(x)$	-	
$h(x)$	$\frac{54}{37}$	-6

►2. Étudier le sens de variations de k définie par $k(x) = x^3 - \frac{27}{2}x^2 + 60x + 2$ sur $[-10 ; 10]$.

$$k'(x) = 3x^2 - 27x + 60$$

Je dois étudier le signe de $k'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = (-27)^2 - 4 \times 3 \times 60 = 9$ et $\sqrt{9} = 3$.

Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-27) - \sqrt{9}}{2 \times 3} &= \frac{27 - \sqrt{9}}{6} & \frac{-(-27) + \sqrt{9}}{2 \times 3} &= \frac{27 + \sqrt{9}}{6} \\ &= \frac{27 - 3}{6} & &= \frac{27 + 3}{6} \\ &= \frac{24}{6} & &= \frac{30}{6} \\ &= 4 & &= 5 \end{aligned}$$

Les racines de k' sont $x_1 = 4$ et $x_2 = 5$.

Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10	4	5	10	
$k'(x)$	+	0	-	0	+

On obtient ainsi le tableau de variation de k .

x	-10	4	5	10	
$k'(x)$	+	0	-	0	+
$k(x)$	-2948	90	$\frac{179}{2}$	252	