Corrigé de l'exercice 1

▶1. On considère la fonction h définie sur $I=[-10\ ;\ 8]$ par $h(x)=\dfrac{-x+2}{-x+9}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-x+9=0$.

$$\begin{aligned} -x+9&=0\\ -x&=-9\\ x&=\frac{-9}{-1}\\ x&=9 \end{aligned}$$

Or 9 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 8]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(x)$ pour tout $x\in[-10\ ;\ 8]$.

$$h'(x)=\frac{(-11)\times(-x+9)-(-x+2)\times(-11)}{(-x+9)^2}=\frac{-7}{(-x+9)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(-x+9)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-7<0$ donc pour tout x de I, $h'(x)<0$. Ainsi, on obtient

x	-10		8
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$\frac{12}{19}$	$\searrow$	-6

▶2. Étudier le sens de variations de g définie par $g(x)=2x^3+33x^2+108x-4$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$g'(x)=6x^2+66x+108$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta=66^2-4\times6\times108=1\,764$ et $\sqrt{1\,764}=42$.
Comme $\Delta>0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-66-\sqrt{1\,764}}{2\times6}&=\frac{-66-\sqrt{1\,764}}{12}\\ &=\frac{-66-42}{12}\\ &=\frac{-108}{12}\\ &=-9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-66+\sqrt{1\,764}}{2\times6}&=\frac{-66+\sqrt{1\,764}}{12}\\ &=\frac{-66+42}{12}\\ &=\frac{-24}{12}\\ &=-2 \end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1=-9$ et $x_2=-2$.
Comme $\Delta>0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-9		-2		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de g.

x	-10		-9		-2		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	216	$\nearrow$	239	$\searrow$	-104	$\nearrow$	$6\,376$

Corrigé de l'exercice 2

►**1.** On considère la fonction f définie sur $I = [-10\ ;\ 7]$ par $f(x) = \dfrac{-2x-6}{x-8}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $x - 8 = 0$.

$$x - 8 = 0$$
$$x = 8$$

Or 8 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 7]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in [-10\ ;\ 7]$.

$$f'(x) = \frac{(-2) \times (x-8) - (-2x-6) \times 11}{(x-8)^2} = \frac{22}{(x-8)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(x-8)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $22 > 0$ donc pour tout x de I, $f'(x) > 0$.

x	-10		7
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{7}{9}$	$\nearrow$	20

►**2.** Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = x^3 - 18x^2 + 96x$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$p'(x) = 3x^2 - 36x + 96$
Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-36)^2 - 4 \times 3 \times 96 = 144$ et $\sqrt{144} = 12$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ a deux racines :

$$\frac{-(-36)-\sqrt{144}}{2\times 3} = \frac{36-\sqrt{144}}{6} = \frac{36-12}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$\frac{-(-36)+\sqrt{144}}{2\times 3} = \frac{36+\sqrt{144}}{6} = \frac{36+12}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

Les racines de p' sont $x_1 = 4$ et $x_2 = 8$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		4		8		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de p.

x	-10		4		8		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$p(x)$	$-3\,760$	$\nearrow$	160	$\searrow$	128	$\nearrow$	160

Corrigé de l'exercice 3

►1. On considère la fonction k définie sur $I = [-3\ ;\ 10]$ par $k(x) = \dfrac{x-4}{-x-4}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-x-4=0$.

$$\begin{aligned}-x-4&=0\\-x&=4\\x&=\frac{4}{-1}\\x&=-4\end{aligned}$$

Or -4 n'est pas dans l'intervalle $[-3\ ;\ 10]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(x)$ pour tout $x \in [-3\ ;\ 10]$.

$$k'(x) = \frac{11 \times (-x-4) - (x-4) \times (-11)}{(-x-4)^2} = \frac{-8}{(-x-4)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I.
Comme $(-x-4)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-8 < 0$ donc pour tout x de I, $k'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	-3		10
$k'(x)$		$-$	
$k(x)$	7	$\searrow$	$-\frac{3}{7}$

►2. Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = x^3 - \dfrac{21}{2}x^2 + 30x + 3$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$g'(x) = 3x^2 - 21x + 30$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-21)^2 - 4 \times 3 \times 30 = 81$ et $\sqrt{81} = 9$.

Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-21)-\sqrt{81}}{2\times 3} &= \frac{21-\sqrt{81}}{6}\\ &= \frac{21-9}{6}\\ &= \frac{12}{6}\\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-(-21)+\sqrt{81}}{2\times 3} &= \frac{21+\sqrt{81}}{6}\\ &= \frac{21+9}{6}\\ &= \frac{30}{6}\\ &= 5\end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = 2$ et $x_2 = 5$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		2		5		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de g.

x	-10		2		5		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-2\,347$	$\nearrow$	29	$\searrow$	$\frac{31}{2}$	$\nearrow$	253

Corrigé de l'exercice 4

▶**1.** On considère la fonction h définie sur $I = [-10\ ;\ 6]$ par $h(x) = \dfrac{5x-3}{x-7}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $x - 7 = 0$.

$$\begin{aligned}x-7&=0\\ x&=7\end{aligned}$$

Or 7 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 6]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(x)$ pour tout $x \in [-10\ ;\ 6]$.

$$h'(x) = \frac{5\times(x-7)-(5x-3)\times 11}{(x-7)^2} = \frac{-32}{(x-7)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(x-7)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-32 < 0$ donc pour tout x de I, $h'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	-10		6
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$\frac{53}{17}$	$\searrow$	-27

▶**2.** Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = 2x^3 + 27x^2 + 48x$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$h'(x) = 6x^2 + 54x + 48$
Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 54^2 - 4 \times 6 \times 48 = 1\,764$ et $\sqrt{1\,764} = 42$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-54-\sqrt{1\,764}}{2\times 6} &= \frac{-54-\sqrt{1\,764}}{12}\\ &= \frac{-54-42}{12}\\ &= \frac{-96}{12}\\ &= -8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-54+\sqrt{1\,764}}{2\times 6} &= \frac{-54+\sqrt{1\,764}}{12}\\ &= \frac{-54+42}{12}\\ &= \frac{-12}{12}\\ &= -1\end{aligned}$$

Les racines de h' sont $x_1 = -8$ et $x_2 = -1$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-8		-1		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de h.

x	-10		-8		-1		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	220	$\nearrow$	320	$\searrow$	-23	$\nearrow$	$5\,180$

Corrigé de l'exercice 5

▶**1.** On considère la fonction h définie sur $I = [0\ ;\ 10]$ par $h(x) = \dfrac{-x+1}{-3x-5}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-3x - 5 = 0$.

$$\begin{aligned}-3x-5 &= 0\\ -3x &= 5\\ x &= \frac{5}{-3}\end{aligned}$$

Or $-\dfrac{5}{3}$ n'est pas dans l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(x)$ pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$.

$$h'(x) = \frac{(-11)\times(-3x-5) - (-x+1)\times(-3)}{(-3x-5)^2} = \frac{8}{(-3x-5)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(-3x-5)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $8 > 0$ donc pour tout x de I, $h'(x) > 0$.

x	0		10
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\frac{1}{5}$	$\nearrow$	$\frac{9}{35}$

►2. Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = x^3 - 15x^2 + 63x - 1$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$p'(x) = 3x^2 - 30x + 63$

Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = (-30)^2 - 4 \times 3 \times 63 = 144$ et $\sqrt{144} = 12$.

Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-30) - \sqrt{144}}{2 \times 3} &= \frac{30 - \sqrt{144}}{6}\\ &= \frac{30 - 12}{6}\\ &= \frac{18}{6}\\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-(-30) + \sqrt{144}}{2 \times 3} &= \frac{30 + \sqrt{144}}{6}\\ &= \frac{30 + 12}{6}\\ &= \frac{42}{6}\\ &= 7\end{aligned}$$

Les racines de p' sont $x_1 = 3$ et $x_2 = 7$.

Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		3		7		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de p.

x	-10		3		7		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$p(x)$	$-3\,131$	$\nearrow$	80	$\searrow$	48	$\nearrow$	129