Corrigé de l'exercice 1

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned}P(x) &= x^2 - 16\\ &= x^2 - \sqrt{16}^2\\ &= \left(x + \sqrt{16}\right) \times \left(x - \sqrt{16}\right)\\ &= (x+4) \times (x-4)\end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{-4}$ et $\boxed{4}$

$$\begin{aligned}R(x) &= -8\,x^2 + 7\\ &= \sqrt{7}^2 - \left(\sqrt{8}\,x\right)^2\\ &= \left(\sqrt{7} + \sqrt{8}\,x\right) \times \left(\sqrt{7} - \sqrt{8}\,x\right)\\ &= \left(\left(\sqrt{4} \times \sqrt{2}\right)\,x + \sqrt{7}\right) \times \left(\sqrt{7} - \left(\sqrt{4} \times \sqrt{2}\right)\,x\right)\\ &= \left(\left(\sqrt{4} \times \sqrt{2}\right)\,x + \sqrt{7}\right) \times \left(\sqrt{7} - 2\,\sqrt{2}\,x\right)\\ &= \left(\left(\sqrt{4} \times \sqrt{2}\right)\,x + \sqrt{7}\right) \times \left(-2\,\sqrt{2}\,x + \sqrt{7}\right)\\ &= \left(2\,\sqrt{2}\,x + \sqrt{7}\right) \times \left(-2\,\sqrt{2}\,x + \sqrt{7}\right)\end{aligned}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-\sqrt{7}}{2\,\sqrt{2}}}$ et $\boxed{\dfrac{\sqrt{7}}{2\,\sqrt{2}}}$

$Q(x) = x^2 + 6\,x + 4$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = 1$, $b = 6$ et $c = 4$:

$$\begin{aligned}\Delta &= 6^2 - 4 \times 1 \times 4\\ \Delta &= 36 - 16\\ \Delta &= 20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-6 - \sqrt{20}}{2 \times 1} & x_2 &= \frac{-6 + \sqrt{20}}{2 \times 1}\\ x_1 &= \frac{-6 - \sqrt{4} \times \sqrt{5}}{2} & x_2 &= \frac{-6 + \sqrt{4} \times \sqrt{5}}{2}\\ x_1 &= \frac{\left(-3 - \sqrt{5}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}} & x_2 &= \frac{\left(-3 + \sqrt{5}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}\\ x_1 &= -3 - \sqrt{5} & x_2 &= -3 + \sqrt{5}\end{aligned}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{-3 - \sqrt{5}}$ et $\boxed{-3 + \sqrt{5}}$

Corrigé de l'exercice 2

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned}P(x) &= -9\,x^2 + 8\\ &= \sqrt{8}^2 - \left(\sqrt{9}\,x\right)^2\\ &= \left(\sqrt{8} + \sqrt{9}\,x\right) \times \left(\sqrt{8} - \sqrt{9}\,x\right)\\ &= \left(3\,x + \left(\sqrt{4} \times \sqrt{2}\right)\right) \times \left(\left(\sqrt{4} \times \sqrt{2}\right) - 3\,x\right)\\ &= \left(3\,x + \left(\sqrt{4} \times \sqrt{2}\right)\right) \times \left(2\,\sqrt{2} - 3\,x\right)\\ &= \left(3\,x + \left(\sqrt{4} \times \sqrt{2}\right)\right) \times \left(-3\,x + 2\,\sqrt{2}\right)\\ &= \left(3\,x + 2\,\sqrt{2}\right) \times \left(-3\,x + 2\,\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-2\,\sqrt{2}}{3}}$ et $\boxed{\dfrac{2\,\sqrt{2}}{3}}$

$$\begin{aligned}R(x) &= 25\,x^2 - 10\,x + 1\\ &= (5\,x)^2 - 2 \times 5\,x \times 1 + 1^2\\ &= (5\,x - 1)^2\end{aligned}$$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{\dfrac{1}{5}}$

$Q(x) = -x^2 - 8\,x + 4$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = -1$, $b = -8$ et $c = 4$:

$$\begin{aligned}\Delta &= (-8)^2 - 4 \times (-1) \times 4\\ \Delta &= 64 - (-16)\\ \Delta &= 80\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{8 - \sqrt{80}}{2 \times (-1)} & x_2 &= \frac{8 + \sqrt{80}}{2 \times (-1)}\\ x_1 &= \frac{8 - \sqrt{16} \times \sqrt{5}}{-2} & x_2 &= \frac{8 + \sqrt{16} \times \sqrt{5}}{-2}\\ x_1 &= \frac{\left(-4 + 2\,\sqrt{5}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}} & x_2 &= \frac{\left(-4 - 2\,\sqrt{5}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}\\ x_1 &= -4 + 2\,\sqrt{5} & x_2 &= -4 - 2\,\sqrt{5}\end{aligned}$$

Les racines de $Q\left(x\right)$ sont $\boxed{-4+2\sqrt{5}}$ et $\boxed{-4-2\sqrt{5}}$

Corrigé de l'exercice 3

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P\left(x\right) &= -2\,x^2-2\,x \\ &= -2\,x\times\left(x+1\right) \end{aligned}$$

Les racines de $P\left(x\right)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{-1}$

$$\begin{aligned} R\left(x\right) &= 25\,x^2-16 \\ &= \left(\sqrt{25}\,x\right)^2-\sqrt{16}^2 \\ &= \left(\sqrt{25}\,x+\sqrt{16}\right)\times\left(\sqrt{25}\,x-\sqrt{16}\right) \\ &= \left(5\,x+4\right)\times\left(5\,x-4\right) \end{aligned}$$

Les racines de $R\left(x\right)$ sont $\boxed{\dfrac{-4}{5}}$ et $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

$Q\left(x\right)=-x^2+16\,x+8$ On calcule le discriminant de $Q\left(x\right)$ avec $a=-1$, $b=16$ et $c=8$:

$$\Delta=16^2-4\times\left(-1\right)\times8$$
$$\Delta=256-\left(-32\right)$$
$$\Delta=288$$

$$x_1=\frac{-16-\sqrt{288}}{2\times\left(-1\right)}\qquad x_2=\frac{-16+\sqrt{288}}{2\times\left(-1\right)}$$
$$x_1=\frac{-16-\sqrt{144}\times\sqrt{2}}{-2}\qquad x_2=\frac{-16+\sqrt{144}\times\sqrt{2}}{-2}$$
$$x_1=\frac{\left(8+6\sqrt{2}\right)\times\cancel{\left(-2\right)}}{1\times\cancel{\left(-2\right)}}\qquad x_2=\frac{\left(8-6\sqrt{2}\right)\times\cancel{\left(-2\right)}}{1\times\cancel{\left(-2\right)}}$$
$$x_1=8+6\sqrt{2}\qquad x_2=8-6\sqrt{2}$$

Les racines de $Q\left(x\right)$ sont $\boxed{8+6\sqrt{2}}$ et $\boxed{8-6\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 4

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P\left(x\right) &= 16\,x^2-16 \\ &= \left(\sqrt{16}\,x\right)^2-\sqrt{16}^2 \\ &= \left(\sqrt{16}\,x+\sqrt{16}\right)\times\left(\sqrt{16}\,x-\sqrt{16}\right) \\ &= \left(4\,x+4\right)\times\left(4\,x-4\right) \end{aligned}$$

Les racines de $P\left(x\right)$ sont $\boxed{-1}$ et $\boxed{1}$

$$\begin{aligned} Q\left(x\right) &= 4\,x^2-4\,x+1 \\ &= \left(2\,x\right)^2-2\times2\,x\times1+1^2 \\ &= \left(2\,x-1\right)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $Q\left(x\right)$ est $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

$R\left(x\right)=x^2-8\,x+4$ On calcule le discriminant de $R\left(x\right)$ avec $a=1$, $b=-8$ et $c=4$:

$$\Delta=\left(-8\right)^2-4\times1\times4$$
$$\Delta=64-16$$
$$\Delta=48$$

$$x_1=\frac{8-\sqrt{48}}{2\times1}\qquad x_2=\frac{8+\sqrt{48}}{2\times1}$$
$$x_1=\frac{8-\sqrt{16}\times\sqrt{3}}{2}\qquad x_2=\frac{8+\sqrt{16}\times\sqrt{3}}{2}$$
$$x_1=\frac{\left(4-2\sqrt{3}\right)\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}}\qquad x_2=\frac{\left(4+2\sqrt{3}\right)\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}}$$
$$x_1=4-2\sqrt{3}\qquad x_2=4+2\sqrt{3}$$

Les racines de $R\left(x\right)$ sont $\boxed{4-2\sqrt{3}}$ et $\boxed{4+2\sqrt{3}}$

Corrigé de l'exercice 5

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = 36\,x^2 - 4$

$= \left(\sqrt{36}\,x\right)^2 - \sqrt{4}^2$

$= \left(\sqrt{36}\,x + \sqrt{4}\right) \times \left(\sqrt{36}\,x - \sqrt{4}\right)$

$= (6\,x + 2) \times (6\,x - 2)$

<u>Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-1}{3}}$ et $\boxed{\dfrac{1}{3}}$</u>

$Q(x) = 3\,x^2 - x$

$= -x \times (-3\,x + 1)$

<u>Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{1}{3}}$</u>

$R(x) = -x^2 + 6\,x + 7$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = -1$, $b = 6$ et $c = 7$:

$\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times 7$

$\Delta = 36 - (-28)$

$\Delta = 64$

$x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{64}}{2 \times (-1)}$

$x_1 = \dfrac{-6 - 8}{-2}$

$x_1 = \dfrac{7 \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$

$x_1 = 7$

$x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{64}}{2 \times (-1)}$

$x_2 = \dfrac{-6 + 8}{-2}$

$x_2 = \dfrac{-1 \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$

$x_2 = -1$

<u>Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{7}$ et $\boxed{-1}$</u>

Corrigé de l'exercice 6

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = x^2 - 4\,x + 4$

$= x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2$

$= (x - 2)^2$

<u>L'unique racine de $P(x)$ est $\boxed{2}$</u>

$R(x) = 4\,x^2 - 4\,x$

$= -4\,x \times (-x + 1)$

<u>Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{1}$</u>

$Q(x) = x^2 - 4\,x + 3$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = 3$:

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3$

$\Delta = 16 - 12$

$\Delta = 4$

$x_1 = \dfrac{4 - \sqrt{4}}{2 \times 1}$

$x_1 = \dfrac{4 - 2}{2}$

$x_1 = 1$

$x_2 = \dfrac{4 + \sqrt{4}}{2 \times 1}$

$x_2 = \dfrac{4 + 2}{2}$

$x_2 = \dfrac{3 \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$

$x_2 = 3$

<u>Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{1}$ et $\boxed{3}$</u>

Corrigé de l'exercice 7

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = -7\,x^2 - 8\,x$

$= -x \times (7\,x + 8)$

<u>Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{-8}{7}}$</u>

$R(x) = -9\,x^2 - 8$

$R(x) \leqslant -8$ car un carré est toujours positif.

<u>$R(x)$ n'a donc pas de racine.</u>

$Q(x) = x^2 + 2\,x - 7$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = -7$:

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-7)$

$\Delta = 4 - (-28)$

$\Delta = 32$

$x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{32}}{2 \times 1}$

$x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{16} \times \sqrt{2}}{2}$

$x_1 = \dfrac{\left(-1 - 2\sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$

$x_1 = -1 - 2\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{32}}{2 \times 1}$

$x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{16} \times \sqrt{2}}{2}$

$x_2 = \dfrac{\left(-1 + 2\sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$

$x_2 = -1 + 2\sqrt{2}$

Les racines de $Q\left(x\right)$ sont $\boxed{-1-2\sqrt{2}}$ et $\boxed{-1+2\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 8

Déterminer les racines des polynômes :

$P\left(x\right)=2\,x^2+1$
$P\left(x\right)\geqslant 1$ car un carré est toujours positif.
$P\left(x\right)$ n'a donc pas de racine.

$$\begin{aligned}Q\left(x\right)&=64\,x^2-48\,x+9\\&=\left(8\,x\right)^2-2\times 8\,x\times 3+3^2\\&=\left(8\,x-3\right)^2\end{aligned}$$

L'unique racine de $Q\left(x\right)$ est $\boxed{\dfrac{3}{8}}$

$R\left(x\right)=x^2-4\,x+1$ On calcule le discriminant de $R\left(x\right)$ avec $a=1$, $b=-4$ et $c=1$:

$\Delta=\left(-4\right)^2-4\times 1\times 1$

$\Delta=16-4$

$\Delta=12$

$$x_1=\frac{4-\sqrt{12}}{2\times 1}$$
$$x_1=\frac{4-\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{2}$$
$$x_1=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}}$$
$$x_1=2-\sqrt{3}$$

$$x_2=\frac{4+\sqrt{12}}{2\times 1}$$
$$x_2=\frac{4+\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{2}$$
$$x_2=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}}$$
$$x_2=2+\sqrt{3}$$

Les racines de $R\left(x\right)$ sont $\boxed{2-\sqrt{3}}$ et $\boxed{2+\sqrt{3}}$