Corrigé de l'exercice 1

▶1. On considère la fonction k définie sur $I = [-10\ ;\ -1]$ par $k(x) = \dfrac{-x+1}{-5x+1}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-5x+1=0$.

$$\begin{aligned} -5x+1 &= 0 \\ -5x &= -1 \\ x &= \frac{-1}{-5} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ -1]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(x)$ pour tout $x \in [-10\ ;\ -1]$.

$$k'(x) = \frac{(-11) \times (-5x+1) - (-x+1) \times (-5)}{(-5x+1)^2} = \frac{4}{(-5x+1)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I.
Comme $(-5x+1)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $4 > 0$ donc pour tout x de I, $k'(x) > 0$.

x	-10		-1
$k'(x)$		$+$	
$k(x)$	$\frac{11}{51}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

▶2. Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = 2x^3 - 27x^2 + 84x$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$g'(x) = 6x^2 - 54x + 84$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-54)^2 - 4 \times 6 \times 84 = 900$ et $\sqrt{900} = 30$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-54) - \sqrt{900}}{2 \times 6} &= \frac{54 - \sqrt{900}}{12} \\ &= \frac{54-30}{12} \\ &= \frac{24}{12} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-(-54) + \sqrt{900}}{2 \times 6} &= \frac{54 + \sqrt{900}}{12} \\ &= \frac{54+30}{12} \\ &= \frac{84}{12} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = 2$ et $x_2 = 7$.

x	-10		10
$g'(x)$		$+$	

Comme $\Delta < 0$, $g'(x)$ ne s'annule pas et est toujours du signe de a Ainsi
Donc la fonction polynômiale g est croissante sur $[-10\ ;\ 10]$.

Corrigé de l'exercice 2

▶**1.** On considère la fonction f définie sur $I = [0\ ;\ 10]$ par $f(x) = \dfrac{4x+5}{3x+4}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $3x+4=0$.

$$\begin{aligned} 3x+4 &= 0 \\ 3x &= -4 \\ x &= \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{4}{3}$ n'est pas dans l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$.

$$f'(x) = \frac{4 \times (3x+4) - (4x+5) \times 3}{(3x+4)^2} = \frac{11}{(3x+4)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(3x+4)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $1 > 0$ donc pour tout x de I, $f'(x) > 0$.

x	0		10
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$\frac{45}{34}$

▶**2.** Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = 2x^3 + 33x^2 + 108x$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$g'(x) = 6x^2 + 66x + 108$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 66^2 - 4 \times 6 \times 108 = 1\,764$ et $\sqrt{1\,764} = 42$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-66-\sqrt{1\,764}}{2\times 6} &= \frac{-66-\sqrt{1\,764}}{12} \\ &= \frac{-66-42}{12} \\ &= \frac{-108}{12} \\ &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-66+\sqrt{1\,764}}{2\times 6} &= \frac{-66+\sqrt{1\,764}}{12} \\ &= \frac{-66+42}{12} \\ &= \frac{-24}{12} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = -9$ et $x_2 = -2$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-9		-2		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de g.

x	-10		-9		-2		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	220	$\nearrow$	243	$\searrow$	-100	$\nearrow$	$6\,380$

Corrigé de l'exercice 3

►1. On considère la fonction h définie sur $I = [-2\ ;\ 10]$ par $h(t) = \dfrac{-3t+2}{-2t-6}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-2t-6=0$.

$$\begin{aligned} -2t-6&=0\\ -2t&=6\\ t&=\frac{6}{-2}\\ t&=-3 \end{aligned}$$

Or -3 n'est pas dans l'intervalle $[-2\ ;\ 10]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in [-2\ ;\ 10]$.

$$h'(t) = \frac{(-3)\times(-2t-6)-(-3t+2)\times(-2)}{(-2t-6)^2} = \frac{22}{(-2t-6)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(-2t-6)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $22>0$ donc pour tout t de I, $h'(t)>0$.

t	-2		10
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	-4	$\nearrow$	$\dfrac{14}{13}$

►2. Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = 3x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 - 3$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$g'(x) = 9x^2 - 9x$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-9)^2 - 4\times 9\times 0 = 81$ et $\sqrt{81} = 9$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-9)-\sqrt{81}}{2\times 9} &= \frac{9-\sqrt{81}}{18}\\ &= \frac{9-9}{18}\\ &= \frac{0}{18}\\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-(-9)+\sqrt{81}}{2\times 9} &= \frac{9+\sqrt{81}}{18}\\ &= \frac{9+9}{18}\\ &= \frac{18}{18}\\ &= 1 \end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		0		1		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de g.

x	-10		0		1		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-3\,453$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\dfrac{9}{2}$	$\nearrow$	$2\,547$

Corrigé de l'exercice 4

►1. On considère la fonction k définie sur $I = [-2\ ;\ 10]$ par $k(t) = \dfrac{2t-4}{t+3}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $t + 3 = 0$.

$$t + 3 = 0$$
$$t = -3$$

Or -3 n'est pas dans l'intervalle $[-2\ ;\ 10]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(t)$ pour tout $t \in [-2\ ;\ 10]$.

$$k'(t) = \frac{2 \times (t+3) - (2t-4) \times 11}{(t+3)^2} = \frac{10}{(t+3)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I.
Comme $(t+3)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $10 > 0$ donc pour tout t de I, $k'(t) > 0$.

t	-2		10
$k'(x)$		$+$	
$k(x)$	-8	$\nearrow$	$\dfrac{16}{13}$

►2. Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = x^3 + \dfrac{21}{2}x^2 + 30x + 1$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$q'(x) = 3x^2 + 21x + 30$
Je dois étudier le signe de $q'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 21^2 - 4 \times 3 \times 30 = 81$ et $\sqrt{81} = 9$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-21-\sqrt{81}}{2\times 3} &= \frac{-21-\sqrt{81}}{6}\\ &= \frac{-21-9}{6}\\ &= \frac{-30}{6}\\ &= -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-21+\sqrt{81}}{2\times 3} &= \frac{-21+\sqrt{81}}{6}\\ &= \frac{-21+9}{6}\\ &= \frac{-12}{6}\\ &= -2\end{aligned}$$

Les racines de q' sont $x_1 = -5$ et $x_2 = -2$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-5		-2		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de q.

x	-10		-5		-2		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$q(x)$	-249	$\nearrow$	$-\dfrac{23}{2}$	$\searrow$	-25	$\nearrow$	$2\,351$

Corrigé de l'exercice 5

▶**1.** On considère la fonction f définie sur $I = [-1\ ;\ 10]$ par $f(t) = \dfrac{-2t-1}{-3t-7}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-3t - 7 = 0$.

$$\begin{aligned} -3t - 7 &= 0 \\ -3t &= 7 \\ t &= \frac{7}{-3} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{7}{3}$ n'est pas dans l'intervalle $[-1\ ;\ 10]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in [-1\ ;\ 10]$.

$$f'(t) = \frac{(-2) \times (-3t-7) - (-2t-1) \times (-3)}{(-3t-7)^2} = \frac{11}{(-3t-7)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(-3t-7)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $11 > 0$ donc pour tout t de I, $f'(t) > 0$.

t	-1		10
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{21}{37}$

▶**2.** Étudier le sens de variations de k définie par $k(x) = 3x^3 - \dfrac{81}{2}x^2 + 72x - 7$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$k'(x) = 9x^2 - 81x + 72$
Je dois étudier le signe de $k'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-81)^2 - 4 \times 9 \times 72 = 3\,969$ et $\sqrt{3\,969} = 63$.

Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-81)-\sqrt{3\,969}}{2\times 9} &= \frac{81-\sqrt{3\,969}}{18}\\ &= \frac{81-63}{18}\\ &= \frac{18}{18}\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-(-81)+\sqrt{3\,969}}{2\times 9} &= \frac{81+\sqrt{3\,969}}{18}\\ &= \frac{81+63}{18}\\ &= \frac{144}{18}\\ &= 8\end{aligned}$$

Les racines de k' sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 8$.

x	-10 $\qquad$ 10
$k'(x)$	$+$

Comme $\Delta < 0$, $k'(x)$ ne s'annule pas et est toujours du signe de a Ainsi
Donc la fonction polynômiale k est croissante sur $[-10\ ;\ 10]$.