Corrigé de l'exercice 1

▶1. On considère la fonction g définie sur $I = [-1\ ;\ 10]$ par $g(t) = \dfrac{5t+3}{4t+7}$.

a) Justifier que g est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $4t+7=0$.

$$\begin{aligned} 4t+7 &= 0 \\ 4t &= -7 \\ t &= \frac{-7}{4} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{7}{4}$ n'est pas dans l'intervalle $[-1\ ;\ 10]$ et comme g est un quotient de polynômes, alors g est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $g'(t)$ pour tout $t \in [-1\ ;\ 10]$.

$$g'(t) = \frac{5\times(4t+7)-(5t+3)\times 4}{(4t+7)^2} = \frac{23}{(4t+7)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de g sur I.
Comme $(4t+7)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $23>0$ donc pour tout t de I, $g'(t)>0$.

t	-1		10
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\dfrac{2}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{53}{47}$

▶2. Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = 3x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 - 108x - 6$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$h'(x) = 9x^2 - 9x - 108$
Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-9)^2 - 4\times 9\times(-108) = 3\,969$ et $\sqrt{3\,969} = 63$.
Comme $\Delta>0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-9)-\sqrt{3\,969}}{2\times 9} &= \frac{9-\sqrt{3\,969}}{18} \\ &= \frac{9-63}{18} \\ &= \frac{-54}{18} \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-(-9)+\sqrt{3\,969}}{2\times 9} &= \frac{9+\sqrt{3\,969}}{18} \\ &= \frac{9+63}{18} \\ &= \frac{72}{18} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Les racines de h' sont $x_1=-3$ et $x_2=4$.
Comme $\Delta>0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		$\dfrac{1-\sqrt{47}}{2}$		$\dfrac{1+\sqrt{47}}{2}$		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de h.

x	-10		$\dfrac{1-\sqrt{47}}{2}$		$\dfrac{1+\sqrt{47}}{2}$		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-2\,376$	$\nearrow$	$-\dfrac{243}{4}$	$\searrow$	$-\dfrac{243}{4}$	$\nearrow$	$1\,464$

Corrigé de l'exercice 2

►1. On considère la fonction f définie sur $I = [-2\ ;\ 10]$ par $f(t) = \dfrac{-t+7}{2t+6}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $2t + 6 = 0$.

$$\begin{aligned} 2t + 6 &= 0 \\ 2t &= -6 \\ t &= \frac{-6}{2} \\ t &= -3 \end{aligned}$$

Or -3 n'est pas dans l'intervalle $[-2\ ;\ 10]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in [-2\ ;\ 10]$.

$$f'(t) = \frac{(-1) \times (2t+6) - (-t+7) \times 2}{(2t+6)^2} = \frac{-20}{(2t+6)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(2t+6)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-20 < 0$ donc pour tout t de I, $f'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	-2		10
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\dfrac{9}{2}$	$\searrow$	$-\dfrac{3}{26}$

►2. Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = 3x^3 + 81x^2 + 729x - 10$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$p'(x) = 9x^2 + 162x + 729$
Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 162^2 - 4 \times 9 \times 729 = 0$.
Comme $\Delta = 0$, $p'(x)$ a une seule racine $x_0 = \dfrac{-162}{2 \times 9} = -9$.
Comme $\Delta = 0$, $p'(x)$ s'annule une seule fois pour $x_0 = -9$ et est toujours du signe de a.

x	-10		-9		10
$p'(x)$		$+$	0	$+$	

Donc la fonction polynômiale p est croissante sur $[-10\ ;\ 10]$.

Corrigé de l'exercice 3

▶1. On considère la fonction f définie sur $I = [-4\ ;\ 10]$ par $f(t) = \dfrac{5t-2}{-t-5}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-t-5=0$.

$$\begin{aligned} -t-5 &= 0 \\ -t &= 5 \\ t &= \frac{5}{-1} \\ t &= -5 \end{aligned}$$

Or -5 n'est pas dans l'intervalle $[-4\ ;\ 10]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in [-4\ ;\ 10]$.

$$f'(t) = \frac{5\times(-t-5)-(5t-2)\times(-11)}{(-t-5)^2} = \frac{-27}{(-t-5)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(-t-5)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-27<0$ donc pour tout t de I, $f'(t)<0$. Ainsi, on obtient

t	-4		10
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	22	$\searrow$	$-\dfrac{16}{5}$

▶2. Étudier le sens de variations de f définie par $f(x) = 2x^3+9x^2+12x+8$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$f'(x) = 6x^2+18x+12$
Je dois étudier le signe de $f'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 18^2 - 4\times 6\times 12 = 36$ et $\sqrt{36} = 6$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-18-\sqrt{36}}{2\times 6} &= \frac{-18-\sqrt{36}}{12} \\ &= \frac{-18-6}{12} \\ &= \frac{-24}{12} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-18+\sqrt{36}}{2\times 6} &= \frac{-18+\sqrt{36}}{12} \\ &= \frac{-18+6}{12} \\ &= \frac{-12}{12} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Les racines de f' sont $x_1 = -2$ et $x_2 = -1$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-2		-1		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de f.

x	-10		-2		-1		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-1\,212$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$3\,028$

Corrigé de l'exercice 4

►1. On considère la fonction h définie sur $I = [-10\ ;\ 1]$ par $h(x) = \dfrac{-4x+3}{4x-8}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $4x - 8 = 0$.

$$\begin{aligned} 4x - 8 &= 0 \\ 4x &= 8 \\ x &= \frac{8}{4} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Or 2 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 1]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(x)$ pour tout $x \in [-10\ ;\ 1]$.

$$h'(x) = \frac{(-4) \times (4x-8) - (-4x+3) \times 4}{(4x-8)^2} = \frac{20}{(4x-8)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(4x-8)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $20 > 0$ donc pour tout x de I, $h'(x) > 0$.

x	-10		1
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\dfrac{43}{48}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{4}$

►2. Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = 3x^3 - \dfrac{63}{2}x^2 + 54x - 3$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$p'(x) = 9x^2 - 63x + 54$
Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-63)^2 - 4 \times 9 \times 54 = 2\,025$ et $\sqrt{2\,025} = 45$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-63) - \sqrt{2\,025}}{2 \times 9} &= \frac{63 - \sqrt{2\,025}}{18} \\ &= \frac{63-45}{18} \\ &= \frac{18}{18} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-(-63) + \sqrt{2\,025}}{2 \times 9} &= \frac{63 + \sqrt{2\,025}}{18} \\ &= \frac{63+45}{18} \\ &= \frac{108}{18} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Les racines de p' sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 6$.

x	-10 $\qquad$ 10
$p'(x)$	$+$

Comme $\Delta < 0$, $p'(x)$ ne s'annule pas et est toujours du signe de a Ainsi
Donc la fonction polynômiale p est croissante sur $[-10\ ;\ 10]$.

Corrigé de l'exercice 5

►**1.** On considère la fonction h définie sur $I = [-1\ ;\ 10]$ par $h(t) = \dfrac{5t+7}{5t+9}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $5t + 9 = 0$.

$$\begin{aligned} 5t+9 &= 0 \\ 5t &= -9 \\ t &= \frac{-9}{5} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{9}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[-1\ ;\ 10]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in [-1\ ;\ 10]$.

$$h'(t) = \frac{5 \times\ (5t+9) - (5t+7) \times 5}{(5t+9)^2} = \frac{10}{(5t+9)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(5t+9)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $10 > 0$ donc pour tout t de I, $h'(t) > 0$.

t	-1 $\qquad$ 10
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	$\frac{1}{2} \nearrow \frac{57}{59}$

►**2.** Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = 3x^3 + \dfrac{135}{2}x^2 + 486x - 9$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$q'(x) = 9x^2 + 135x + 486$
Je dois étudier le signe de $q'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 135^2 - 4 \times 9 \times 486 = 729$ et $\sqrt{729} = 27$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-135-\sqrt{729}}{2\times 9} &= \frac{-135-\sqrt{729}}{18} \\ &= \frac{-135-27}{18} \\ &= \frac{-162}{18} \\ &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-135+\sqrt{729}}{2\times 9} &= \frac{-135+\sqrt{729}}{18} \\ &= \frac{-135+27}{18} \\ &= \frac{-108}{18} \\ &= -6 \end{aligned}$$

Les racines de q' sont $x_1 = -9$ et $x_2 = -6$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-9		-6		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de q.

x	-10		-9		-6		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$q(x)$	$-1\,119$	$\nearrow$	$-\dfrac{2\,205}{2}$	$\searrow$	$-1\,143$	$\nearrow$	$14\,601$