Corrigé de l'exercice 1

▶1. On considère la fonction f définie sur $I = [-10\ ;\ 7]$ par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-8}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $x - 8 = 0$.

$x - 8 = 0$

$x = 8$

Or 8 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 7]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in [-10\ ;\ 7]$.

$$f'(x) = \frac{3 \times (x-8) - (3x+2) \times 11}{(x-8)^2} = \frac{-26}{(x-8)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(x-8)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-26 < 0$ donc pour tout x de I, $f'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	-10		7
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{14}{9}$	↘	-23

▶2. Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = x^3 + 9x^2 + 15x - 5$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$h'(x) = 3x^2 + 18x + 15$
Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 18^2 - 4 \times 3 \times 15 = 144$ et $\sqrt{144} = 12$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\frac{-18-\sqrt{144}}{2\times 3} = \frac{-18-\sqrt{144}}{6} = \frac{-18-12}{6} = \frac{-30}{6} = -5$$

$$\frac{-18+\sqrt{144}}{2\times 3} = \frac{-18+\sqrt{144}}{6} = \frac{-18+12}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

Les racines de h' sont $x_1 = -5$ et $x_2 = -1$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-5		-1		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de h.

x	-10		-5		-1		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	-255	↗	20	↘	-12	↗	$2\,045$

Corrigé de l'exercice 2

▶**1.** On considère la fonction h définie sur $I = [-3\ ;\ 10]$ par $h(t) = \dfrac{5t-5}{2t+9}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $2t+9=0$.

$$\begin{aligned} 2t+9 &= 0 \\ 2t &= -9 \\ t &= \frac{-9}{2} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{9}{2}$ n'est pas dans l'intervalle $[-3\ ;\ 10]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in [-3\ ;\ 10]$.

$$h'(t) = \frac{5 \times (2t+9) - (5t-5) \times 2}{(2t+9)^2} = \frac{55}{(2t+9)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(2t+9)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $55 > 0$ donc pour tout t de I, $h'(t) > 0$.

t	-3		10
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\dfrac{20}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{45}{29}$

▶**2.** Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 2$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$g'(x) = 6x^2 + 12x - 18$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 12^2 - 4 \times 6 \times (-18) = 576$ et $\sqrt{576} = 24$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-12-\sqrt{576}}{2 \times 6} &= \frac{-12-\sqrt{576}}{12} \\ &= \frac{-12-24}{12} \\ &= \frac{-36}{12} \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-12+\sqrt{576}}{2 \times 6} &= \frac{-12+\sqrt{576}}{12} \\ &= \frac{-12+24}{12} \\ &= \frac{12}{12} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-3		1		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de g.

x	-10		-3		1		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-1\,218$	$\nearrow$	56	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$2\,422$

Corrigé de l'exercice 3

►1. On considère la fonction k définie sur $I = [-10 \ ; \ 1]$ par $k(t) = \dfrac{3t+5}{2t-5}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $2t-5=0$.

$$\begin{aligned} 2t-5 &= 0 \\ 2t &= 5 \\ t &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{5}{2}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10 \ ; \ 1]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(t)$ pour tout $t \in [-10 \ ; \ 1]$.

$$k'(t) = \frac{3 \times (2t-5) - (3t+5) \times 2}{(2t-5)^2} = \frac{-25}{(2t-5)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I.
Comme $(2t-5)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-25 < 0$ donc pour tout t de I, $k'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	-10		1
$k'(x)$		$-$	
$k(x)$	1	$\searrow$	$-\dfrac{8}{3}$

►2. Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = 2x^3 - 15x^2 + 3$ sur $[-10 \ ; \ 10]$.
$q'(x) = 6x^2 - 30x$
Je dois étudier le signe de $q'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-30)^2 - 4 \times 6 \times 0 = 900$ et $\sqrt{900} = 30$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-30) - \sqrt{900}}{2 \times 6} &= \frac{30 - \sqrt{900}}{12} \\ &= \frac{30-30}{12} \\ &= \frac{0}{12} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-(-30) + \sqrt{900}}{2 \times 6} &= \frac{30 + \sqrt{900}}{12} \\ &= \frac{30+30}{12} \\ &= \frac{60}{12} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Les racines de q' sont $x_1 = 0$ et $x_2 = 5$.

Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		0		5		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de q.

x	-10		0		5		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$q(x)$	$-3\,497$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-122	$\nearrow$	503

Corrigé de l'exercice 4

►**1.** On considère la fonction k définie sur $I = [-10\ ;\ 1]$ par $k(x) = \dfrac{4x+9}{2x-4}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $2x - 4 = 0$.

$$\begin{aligned} 2x-4&=0\\ 2x&=4\\ x&=\frac{4}{2}\\ x&=2 \end{aligned}$$

Or 2 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 1]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(x)$ pour tout $x \in [-10\ ;\ 1]$.

$$k'(x) = \frac{4 \times (2x-4) - (4x+9) \times 2}{(2x-4)^2} = \frac{-34}{(2x-4)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I.
Comme $(2x-4)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-34 < 0$ donc pour tout x de I, $k'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	-10		1
$k'(x)$		$-$	
$k(x)$	$\frac{31}{24}$	$\searrow$	$-\frac{13}{2}$

►**2.** Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 - 12x + 3$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$h'(x) = 3x^2 - 9x - 12$
Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225$ et $\sqrt{225} = 15$.

Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-9)-\sqrt{225}}{2\times 3} &= \frac{9-\sqrt{225}}{6}\\ &= \frac{9-15}{6}\\ &= \frac{-6}{6}\\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-(-9)+\sqrt{225}}{2\times 3} &= \frac{9+\sqrt{225}}{6}\\ &= \frac{9+15}{6}\\ &= \frac{24}{6}\\ &= 4\end{aligned}$$

Les racines de h' sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		$\frac{3-\sqrt{7}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{7}}{2}$		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de h.

x	-10		$\frac{3-\sqrt{7}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{7}}{2}$		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-1\,327$	$\nearrow$	$-\frac{87}{4}$	$\searrow$	$-\frac{87}{4}$	$\nearrow$	433

Corrigé de l'exercice 5

▶**1.** On considère la fonction g définie sur $I = [1\ ;\ 10]$ par $g(t) = \dfrac{4t-5}{5t+2}$.

a) Justifier que g est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $5t+2=0$.

$$\begin{aligned}5t+2 &= 0\\ 5t &= -2\\ t &= \frac{-2}{5}\end{aligned}$$

Or $-\dfrac{2}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[1\ ;\ 10]$ et comme g est un quotient de polynômes, alors g est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $g'(t)$ pour tout $t \in [1\ ;\ 10]$.

$$g'(t) = \frac{4\times(5t+2)-(4t-5)\times 5}{(5t+2)^2} = \frac{33}{(5t+2)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de g sur I.
Comme $(5t+2)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $33 > 0$ donc pour tout t de I, $g'(t) > 0$.

t	1		10
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\frac{1}{7}$	$\nearrow$	$\frac{35}{52}$

►2. Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = 3x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 9$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$g'(x) = 9x^2 - 9x$

Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 9 \times 0 = 81$ et $\sqrt{81} = 9$.

Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-9) - \sqrt{81}}{2 \times 9} &= \frac{9 - \sqrt{81}}{18} \\ &= \frac{9 - 9}{18} \\ &= \frac{0}{18} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-(-9) + \sqrt{81}}{2 \times 9} &= \frac{9 + \sqrt{81}}{18} \\ &= \frac{9 + 9}{18} \\ &= \frac{18}{18} \\ &= 1\end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.

Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		0		1		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de g.

x	-10		0		1		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-3\,441$	$\nearrow$	9	$\searrow$	$\dfrac{15}{2}$	$\nearrow$	$2\,559$