Corrigé de l'exercice 1

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 0{,}5\,x^2 - 0{,}5\,x - 10$.

▶1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
0{,}5\,(x+4)\,(x-5) &= 0{,}5\,(x \times x + 4 \times x - 5 \times x + 4 \times (-5)) \\
&= 0{,}5\,\left(x^2 - x - 20\right) \\
&= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times (-x) + 0{,}5 \times (-20) \\
&= 0{,}5\,x^2 - 0{,}5\,x - 10 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
0{,}5\,(x-0{,}5)^2 - 10{,}125 &= 0{,}5\,\left(x^2 - 2 \times 0{,}5 \times x + 0{,}5^2\right) - 10{,}125 \\
&= 0{,}5\,\left(x^2 - x + 0{,}25\right) - 10{,}125 \\
&= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times (-x) + 0{,}5 \times 0{,}25 - 10{,}125 \\
&= 0{,}5\,x^2 - 0{,}5\,x + 0{,}125 - 10{,}125 \\
&= 0{,}5\,x^2 - 0{,}5\,x - 10 \\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

▶2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $0{,}5\,(x+4)\,(x-5) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
x + 4 = 0 &\text{ ou } x - 5 = 0 \\
x = -4 &\text{ ou } x = 5
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -4 et 5.

b) $f\,(x) = -10$ On remarque que la forme développée contient la constante -10 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned}
f\,(x) &= -10 \\
0{,}5\,x^2 - 0{,}5\,x - 10 &= -10 \\
0{,}5\,x^2 - 0{,}5\,x - 10 + 10 &= -10 + 10 \\
0{,}5\,x^2 - 0{,}5\,x &= 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned}
0{,}5\,x^2 - 0{,}5\,x &= 0 \\
0{,}5\,x \times x - 0{,}5 \times x &= 0 \\
x\,(0{,}5\,x - 0{,}5) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x = 0 \text{ ou } 0{,}5\,x - 0{,}5 = 0 \\
&x = 0 \text{ ou } 0{,}5\,x = 0{,}5 \\
&x = 0 \text{ ou } x = \frac{0{,}5}{0{,}5} \\
&x = 0 \text{ ou } x = 1
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 1$.

c) $f(x) = -10{,}125$ On remarque que la forme canonique contient la constante $-10{,}125$: en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= -10{,}125 \\ 0{,}5\,(x-0{,}5)^2 - 10{,}125 &= -10{,}125 \\ 0{,}5\,(x-0{,}5)^2 - 10{,}125 + 10{,}125 &= -10{,}125 + 10{,}125 \\ 0{,}5\,(x-0{,}5)^2 &= 0 \\ (x-0{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x - 0{,}5 &= 0 \\ x &= 0{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = 0{,}5$.

▶3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{-0{,}5}{2\times 0{,}5}$, soit 0,5, et $f(0{,}5) = 0{,}5 \times 0{,}5^2 - 0{,}5 \times 0{,}5 - 10 = -10{,}125$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		$0{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-10{,}125$	$\nearrow$	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = 0{,}5\,(x+4)\,(x-5)$.

- Le premier facteur $x+4$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 4$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{1} = -4$.
- Le second facteur $x-5$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -5$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5$.

x	$-\infty$		-4		5		$+\infty$
$0{,}5$		$+$		$+$		$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = 0{,}5\,(x+4)\,(x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

▶4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in \left]-\infty\,;\,-4\right] \cup \left[5\,;\,+\infty\right[$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par f est $-10{,}125$. Le minimum de f est donc $-10{,}125$, et il est atteint pour $x = 0{,}5$.

Corrigé de l'exercice 2

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 2\,x^2 + 34\,x + 60$.

▶**1.** **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} 2\,(x+2)\,(x+15) &= 2\,(x \times x + 2 \times x + 15 \times x + 2 \times 15) \\ &= 2\,\left(x^2 + 17\,x + 30\right) \\ &= 2 \times x^2 + 2 \times 17\,x + 2 \times 30 \\ &= 2\,x^2 + 34\,x + 60 \\ &= f\,(x) \end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} 2\,(x+8{,}5)^2 - 84{,}50 &= 2\,\left(x^2 + 2 \times 8{,}5 \times x + 8{,}5^2\right) - 84{,}50 \\ &= 2\,\left(x^2 + 17\,x + 72{,}25\right) - 84{,}50 \\ &= 2 \times x^2 + 2 \times 17\,x + 2 \times 72{,}25 - 84{,}50 \\ &= 2\,x^2 + 34\,x + 144{,}50 - 84{,}50 \\ &= 2\,x^2 + 34\,x + 60 \\ &= f\,(x) \end{aligned}$$

▶**2.** Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f\,(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $2\,(x+2)\,(x+15) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x + 2 = 0 &\text{ ou } x + 15 = 0 \\ x = -2 &\text{ ou } x = -15 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -2 et -15.

b) $f\,(x) = 60$ On remarque que la forme développée contient la constante 60 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f\,(x) &= 60 \\ 2\,x^2 + 34\,x + 60 &= 60 \\ 2\,x^2 + 34\,x + 60 - 60 &= 60 - 60 \\ 2\,x^2 + 34\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} 2\,x^2 + 34\,x &= 0 \\ 2\,x \times x + 34 \times x &= 0 \\ x\,(2\,x + 34) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ ou $2\,x + 34 = 0$
$x = 0$ ou $2\,x = -34$
$x = 0$ ou $x = \dfrac{-34}{2}$
$x = 0$ ou $x = -17$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -17$.

c) $f(x) = -84{,}50$ On remarque que la forme canonique contient la constante $-84{,}50$: en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= -84{,}50 \\ 2\,(x+8{,}5)^2 - 84{,}50 &= -84{,}50 \\ 2\,(x+8{,}5)^2 - 84{,}50 + 84{,}50 &= -84{,}50 + 84{,}50 \\ 2\,(x+8{,}5)^2 &= 0 \\ (x+8{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$x + 8{,}5 = 0$
$x = -8{,}5$

Il y a donc une unique solution $x = -8{,}5$.

▶3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{34}{2\times 2}$, soit $-8{,}5$, et $f(-8{,}5) = 2 \times (-8{,}5)^2 + 34 \times (-8{,}5) + 60 = -84{,}50$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	$-8{,}5$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-84{,}50$	↗

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = 2\,(x+2)\,(x+15)$.

- Le premier facteur $x + 2$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 2$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$.
- Le second facteur $x + 15$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 15$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{15}{1} = -15$.

x	$-\infty$		-15		-2		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
$x + 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 15$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) = 2(x+2)(x+15)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

▶4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre* $f(x) \geqslant 0$. En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in \left]-\infty\,;\,-15\right] \cup \left[-2\,;\,+\infty\right[$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par f est $-84{,}50$. Le minimum de f est donc $-84{,}50$, et il est atteint pour $x = -8{,}5$.

Corrigé de l'exercice 3

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 0{,}5\,x^2 - 2\,x - 22{,}5$.

▶1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
0{,}5\,(x+5)\,(x-9) &= 0{,}5\,(x \times x + 5 \times x - 9 \times x + 5 \times (-9)) \\
&= 0{,}5\,\left(x^2 - 4\,x - 45\right) \\
&= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times (-4\,x) + 0{,}5 \times (-45) \\
&= 0{,}5\,x^2 - 2\,x - 22{,}5 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
0{,}5\,(x-2)^2 - 24{,}5 &= 0{,}5\,\left(x^2 - 2 \times 2 \times x + 2^2\right) - 24{,}5 \\
&= 0{,}5\,\left(x^2 - 4\,x + 4\right) - 24{,}5 \\
&= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times (-4\,x) + 0{,}5 \times 4 - 24{,}5 \\
&= 0{,}5\,x^2 - 2\,x + 2 - 24{,}5 \\
&= 0{,}5\,x^2 - 2\,x - 22{,}5 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

▶2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $0{,}5\,(x+5)\,(x-9) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
x + 5 = 0 &\text{ ou } x - 9 = 0 \\
x = -5 &\text{ ou } x = 9
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -5 et 9.

b) $f(x) = -22{,}5$ On remarque que la forme développée contient la constante $-22{,}5$: celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= -22{,}5 \\ 0{,}5\,x^2 - 2\,x - 22{,}5 &= -22{,}5 \\ 0{,}5\,x^2 - 2\,x - 22{,}5 + 22{,}5 &= -22{,}5 + 22{,}5 \\ 0{,}5\,x^2 - 2\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} 0{,}5\,x^2 - 2\,x &= 0 \\ 0{,}5\,x \times x - 2 \times x &= 0 \\ x\,(0{,}5\,x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ ou $0{,}5\,x - 2 = 0$

$x = 0$ ou $0{,}5\,x = 2$

$x = 0$ ou $x = \dfrac{2}{0{,}5}$

$x = 0$ ou $x = 4$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = 4$.

c) $f(x) = -24{,}5$ On remarque que la forme canonique contient la constante $-24{,}5$: en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= -24{,}5 \\ 0{,}5\,(x-2)^2 - 24{,}5 &= -24{,}5 \\ 0{,}5\,(x-2)^2 - 24{,}5 + 24{,}5 &= -24{,}5 + 24{,}5 \\ 0{,}5\,(x-2)^2 &= 0 \\ (x-2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x - 2 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = 2$.

►3. a) *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{-2}{2\times 0{,}5}$, soit 2, et $f(2) = 0{,}5 \times 2^2 - 2 \times 2 - 22{,}5 = -24{,}5$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-24{,}5$	↗

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = 0{,}5\ (x+5)\ (x-9)$.

- Le premier facteur $x+5$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 5$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{5}{1} = -5$.
- Le second facteur $x-9$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = -9$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{-9}{1} = 9$.

x	$-\infty$		-5		9		$+\infty$
$0{,}5$		$+$		$+$		$+$	
$x\ +\ 5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x\ -\ 9$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)\ =$ $0{,}5\ (x+5)\ (x-9)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

▶4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in \left]-\infty\,;\,-5\right] \cup \left[9\,;\,+\infty\right[$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par f est $-24{,}5$. Le minimum de f est donc $-24{,}5$, et il est atteint pour $x = 2$.

Corrigé de l'exercice 4

On considère le trinôme du second degré $f : x \mapsto 0{,}5\,x^2 + 13{,}5\,x + 91$.

▶1. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}0{,}5\ (x+13)\ (x+14) &= 0{,}5\ (x \times x + 13 \times x + 14 \times x + 13 \times 14)\\ &= 0{,}5\ \left(x^2 + 27\,x + 182\right)\\ &= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times 27\,x + 0{,}5 \times 182\\ &= 0{,}5\,x^2 + 13{,}5\,x + 91\\ &= f(x)\end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}0{,}5\ (x+13{,}5)^2 - 0{,}125 &= 0{,}5\ \left(x^2 + 2 \times 13{,}5 \times x + 13{,}5^2\right) - 0{,}125\\ &= 0{,}5\ \left(x^2 + 27\,x + 182{,}25\right) - 0{,}125\\ &= 0{,}5 \times x^2 + 0{,}5 \times 27\,x + 0{,}5 \times 182{,}25 - 0{,}125\\ &= 0{,}5\,x^2 + 13{,}5\,x + 91{,}125 - 0{,}125\\ &= 0{,}5\,x^2 + 13{,}5\,x + 91\\ &= f(x)\end{aligned}$$

►2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.

a) En prenant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation produit nul $0{,}5\,(x+13)\,(x+14) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} x + 13 = 0 &\text{ ou } x + 14 = 0 \\ x = -13 &\text{ ou } x = -14 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : -13 et -14.

b) $f(x) = 91$ On remarque que la forme développée contient la constante 91 : celles-ci devraient donc s'annuler, pour simplifier notre résolution.

$$\begin{aligned} f(x) &= 91 \\ 0{,}5\,x^2 + 13{,}5\,x + 91 &= 91 \\ 0{,}5\,x^2 + 13{,}5\,x + 91 - 91 &= 91 - 91 \\ 0{,}5\,x^2 + 13{,}5\,x &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant factoriser le membre de gauche par x, ce qui nous donnera une équation produit nul.

$$\begin{aligned} 0{,}5\,x^2 + 13{,}5\,x &= 0 \\ 0{,}5\,x \times x + 13{,}5 \times x &= 0 \\ x\,(0{,}5\,x + 13{,}5) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = 0 \text{ ou } 0{,}5\,x + 13{,}5 = 0 \\ &x = 0 \text{ ou } 0{,}5\,x = -13{,}5 \\ &x = 0 \text{ ou } x = \frac{-13{,}5}{0{,}5} \\ &x = 0 \text{ ou } x = -27 \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -27$.

c) $f(x) = -0{,}125$ On remarque que la forme canonique contient la constante $-0{,}125$: en l'utilisant, elles devraient se simplifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}125 \\ 0{,}5\,(x + 13{,}5)^2 - 0{,}125 &= -0{,}125 \\ 0{,}5\,(x + 13{,}5)^2 - 0{,}125 + 0{,}125 &= -0{,}125 + 0{,}125 \\ 0{,}5\,(x + 13{,}5)^2 &= 0 \\ (x + 13{,}5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or 0 est le seul nombre dont le carré est nul, donc l'équation précédente est équivalente à :

$$\begin{aligned} x + 13{,}5 &= 0 \\ x &= -13{,}5 \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -13{,}5$.

►3. **a)** *Dresser le tableau de variations de f.* Dans la forme développée, le coefficient devant le x^2 est positif , donc la fonction est décroissante puis croissante . De plus, l'absisse du sommet est $-\frac{13{,}5}{2\times 0{,}5}$, soit $-13{,}5$, et $f(-13{,}5) = 0{,}5\times(-13{,}5)^2+13{,}5\times(-13{,}5)+91 = -0{,}125$. Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		$-13{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-0{,}125$	$\nearrow$	

b) *Dresser le tableau de signes de f.* Construisons un tableau de signes en utilisant la forme factorisée $f(x) = 0{,}5\ (x+13)\ (x+14)$.

- Le premier facteur $x+13$ est une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 13$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{13}{1} = -13$.
- Le second facteur $x+14$ est aussi une fonction affine, de coefficient directeur $a = 1$ positif, et d'ordonnée à l'origine $b = 14$. Elle est donc négative, puis positive, et change de signe en $-\frac{b}{a} = -\frac{14}{1} = -14$.

x	$-\infty$		-14		-13		$+\infty$
$0{,}5$		$+$		$+$		$+$	
$x+13$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+14$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) = 0{,}5\ (x+13)\ (x+14)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

►4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le tableau de signes ou de variations.

a) *Résoudre $f(x) \geqslant 0$.* En regardant la dernière ligne du tableau de signes, on observe que f est positive sur les premier et dernier intervalles . Les solutions sont donc :

$x \in]-\infty\,;\,-14] \cup [-13\,;\,+\infty[$

b) *Quel est l'extremum de f ? Est-ce un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?* On lit sur le tableau de variations que la plus petite valeur prise par f est $-0{,}125$. Le minimum de f est donc $-0{,}125$, et il est atteint pour $x = -13{,}5$.