

Corrigé de l'exercice 1

- 1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$$262 = 2 \times 131$$

$$\begin{aligned} 2847 &= 3 \times 949 \\ &= 3 \times 13 \times 73 \end{aligned}$$

$$3139 = 43 \times 73$$

$$\begin{aligned} 273 &= 3 \times 91 \\ &= 3 \times 7 \times 13 \end{aligned}$$

433 est un nombre premier.

- 2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 2 847 et 3 139.
D'après la question 1), on sait que les nombres 2 847 et 3 139 ont comme facteurs premiers communs : 73.

On en déduit que le PGCD des nombres 2 847 et 3 139 est : 73.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 2 847 et de 3 139.

En voici deux :

- a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a; b) \times PPCM(a; b)$.

$$\text{Donc : } PPCM(2\,847; 3\,139) = \frac{2\,847 \times 3\,139}{73} = 122\,421.$$

- b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.

Comme $PGCD(2\,847; 3\,139) = 73$, alors les "facteurs complémentaires" de 2 847 = $3 \times 13 \times 73$ sont : 3 , 13. On en déduit que $PPCM(2\,847; 3\,139) = 3\,139 \times 3 \times 13 = 122\,421$.

- 3. Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 262 est :

$$262 = 2 \times 131.$$

Il faut donc encore multiplier ce nombre par les facteurs 2 et 131.

Le nombre cherché est par conséquent 262 et le carré parfait obtenu est 68 644.

- 4. Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction est de diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), $PGCD(2\,847; 3\,139) = 73$, donc on obtient :

$$\frac{2\,847 \div 73}{3\,139 \div 73} = \frac{39}{43}.$$

- 5. Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâce à la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 2 847 et 3 139, qui est par définition le plus petit multiple commun de ces deux nombres.

$$\frac{27 \times 43}{2\,847 \times 43} + \frac{31 \times 39}{3\,139 \times 39} = \frac{1\,161}{122\,421} + \frac{1\,209}{122\,421} = \frac{2\,370 \div 3}{122\,421 \div 3} = \frac{790}{40\,807}.$$

Corrigé de l'exercice 2

- 1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

307 est un nombre premier.

$$340 = 2 \times 170$$

$$= 2 \times 2 \times 85$$

$$= 2 \times 2 \times 5 \times 17$$

$$\begin{aligned}
 1692 &= 2 \times 846 \\
 &= 2 \times 2 \times 423 \\
 &= 2 \times 2 \times 3 \times 141 \\
 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 47
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1476 &= 2 \times 738 \\
 &= 2 \times 2 \times 369 \\
 &= 2 \times 2 \times 3 \times 123 \\
 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 41
 \end{aligned}$$

$$781 = 11 \times 71$$

- 2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 1 476 et 1 692.

D'après la question 1), on sait que les nombres 1 476 et 1 692 ont comme facteurs premiers communs : 2, 2, 3, 3.

On en déduit que le PGCD des nombres 1 476 et 1 692 est : $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 1 476 et de 1 692.

En voici deux :

- a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a; b) \times PPCM(a; b)$.

$$\text{Donc : } PPCM(1\,476; 1\,692) = \frac{1\,476 \times 1\,692}{36} = 69\,372.$$

- b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.

Comme $PGCD(1\,476; 1\,692) = 36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$, alors les "facteurs complémentaires" de $1\,476 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 41$ est : 41. On en déduit que $PPCM(1\,476; 1\,692) = 1\,692 \times 41 = 69\,372$.

- 3. Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 781 est :

$$781 = 11 \times 71.$$

Il faut donc encore multiplier ce nombre par les facteurs 11 et 71.

Le nombre cherché est par conséquent 781 et le carré parfait obtenu est 609 961.

- 4. Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction est de diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), $PGCD(1\,476; 1\,692) = 36$, donc on obtient :

$$\frac{1\,476 \div 36}{1\,692 \div 36} = \frac{41}{47}.$$

- 5. Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâce à la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 1 476 et 1 692, qui est par définition le plus petit multiple commun de ces deux nombres.

$$\frac{44 \times 47}{1\,476 \times 47} + \frac{31 \times 41}{1\,692 \times 41} = \frac{2\,068}{69\,372} + \frac{1\,271}{69\,372} = \frac{3\,339 \div 9}{69\,372 \div 9} = \frac{371}{7\,708}.$$

Corrigé de l'exercice 3

- 1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

607 est un nombre premier.

$$934 = 2 \times 467$$

$$377 = 13 \times 29$$

$$\begin{aligned}
 406 &= 2 \times 203 \\
 &= 2 \times 7 \times 29
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 78 &= 2 \times 39 \\
 &= 2 \times 3 \times 13
 \end{aligned}$$

- 2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 377 et 78.

D'après la question 1), on sait que les nombres 377 et 78 ont comme facteurs premiers communs : 13.

On en déduit que le PGCD des nombres 377 et 78 est : 13.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 377 et de 78.

En voici deux :

- a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a; b) \times PPCM(a; b)$.

$$\text{Donc : } PPCM(377; 78) = \frac{377 \times 78}{13} = 2262.$$

- b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.

Comme $PGCD(377; 78) = 13$, alors les "facteurs complémentaires" de $377 = 13 \times 29$ est : 29. On en déduit que $PPCM(377; 78) = 78 \times 29 = 2262$.

- 3. Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 406 est :

$$406 = 2 \times 7 \times 29.$$

Il faut donc encore multiplier ce nombre par les facteurs 2, 7 et 29.

Le nombre cherché est par conséquent 406 et le carré parfait obtenu est 164 836.

- 4. Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction est de diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), $PGCD(377; 78) = 13$, donc on obtient :

$$\frac{377 \div 13}{78 \div 13} = \frac{29}{6}.$$

- 5. Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâce à la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 377 et 78, qui est par définition le plus petit multiple commun de ces deux nombres.

$$\frac{43 \times 6}{377 \times 6} + \frac{10 \times 29}{78 \times 29} = \frac{258}{2262} + \frac{290}{2262} = \frac{548 \div 2}{2262 \div 2} = \frac{274}{1131}.$$

Corrigé de l'exercice 4

- 1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants, et préciser quand il s'agit d'un nombre premier :

$$934 = 2 \times 467$$

$$\begin{aligned} 2379 &= 3 \times 793 \\ &= 3 \times 13 \times 61 \end{aligned}$$

$$458 = 2 \times 229$$

367 est un nombre premier.

$$2501 = 41 \times 61$$

- 2. En déduire le PGCD et le PPCM des nombres 2501 et 2379.

D'après la question 1), on sait que les nombres 2501 et 2379 ont comme facteurs premiers communs : 61.

On en déduit que le PGCD des nombres 2501 et 2379 est : 61.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PPCM de 2501 et de 2379.

En voici deux :

- a) On peut simplement utiliser la formule : $a \times b = PGCD(a; b) \times PPCM(a; b)$.

$$\text{Donc : } PPCM(2501; 2379) = \frac{2501 \times 2379}{61} = 97539.$$

b) On peut aussi multiplier un nombre par les "facteurs complémentaires" de l'autre. Ces "facteurs complémentaires" sont les facteurs qui complètent le PGCD pour former le nombre.

Comme $PGCD(2\,501; 2\,379) = 61$, alors les "facteurs complémentaires" de $2\,501 = 41 \times 61$ est : 41. On en déduit que $PPCM(2\,501; 2\,379) = 2\,379 \times 41 = 97\,539$.

- 3. Pour obtenir un carré parfait, il faut que sa décomposition en facteurs premiers ne contienne que des facteurs apparaissant un nombre pair de fois. D'après la question 1, la décomposition en facteurs premiers de 458 est :

$$458 = 2 \times 229.$$

Il faut donc encore multiplier ce nombre par les facteurs 2 et 229.

Le nombre cherché est par conséquent 458 et le carré parfait obtenu est 209 764.

- 4. Le moyen le plus rapide de simplifier cette fraction est de diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. D'après la question 2), $PGCD(2\,501; 2\,379) = 61$, donc on obtient :

$$\frac{2\,501 \div 61}{2\,379 \div 61} = \frac{41}{39}.$$

- 5. Il faut mettre les fractions au même dénominateur. Grâce à la question 2), nous avons déjà un dénominateur commun : le PPCM des nombres 2 501 et 2 379, qui est par définition le plus petit multiple commun de ces deux nombres.

$$\frac{7 \times 39}{2\,501 \times 39} + \frac{18 \times 41}{2\,379 \times 41} = \frac{273}{97\,539} + \frac{738}{97\,539} = \frac{1\,011 \div 3}{97\,539 \div 3} = \frac{337}{32\,513}.$$