Corrigé du baccalauréat S Centres étrangers juin 2012

EXERCICE 1 — 4 points

Partie A

1. La droite (IJ) passe par $I\left(1\,;\dfrac{1}{3}\,;\,0\right)$, et elle est dirigée par $\overrightarrow{IJ}\left(-1\,;\dfrac{1}{3}\,;\,1\right)$.

   Une représentation paramétrique de cette droite est $\left\{\begin{array}{l} x = 1-1\times t\\ y = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times t\\ z = 0+1\times t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$, soit $\left\{\begin{array}{l} x = 1-t\\ y = \dfrac{1}{3}+\dfrac{t}{3}\\ z = t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$

2. La droite qui a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{4}+t'\left(a-\dfrac{3}{4}\right)\\ y = t'\\ z = 1-t'\end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$, passe par le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{4}\,;\,0\,;\,1\right)$, c'est-à-dire K ; le vecteur de coordonnées $\left(a-\dfrac{3}{4}\,;\,1\,;\,-1\right)$ en est un vecteur directeur. Or $\overrightarrow{KL}\left(a-\dfrac{3}{4}\,;\,1\,;\,-1\right)$. C'est donc bien une représentation paramétrique de (KL).

3. Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, le système suivant admet une solution unique pour $(t,\ t')$.

   $$\left\{\begin{array}{l} x = 1-t\\ y = \dfrac{1}{3}+\dfrac{t}{3}\\ z = t\\ x = \dfrac{3}{4}+t'\left(a-\dfrac{3}{4}\right)\\ y = t'\\ z = 1-t'\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1-t\\ y = \dfrac{1}{3}+\dfrac{t}{3}\\ z = t\\ 1-t = \dfrac{3}{4}+t'\left(a-\dfrac{3}{4}\right)\\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{t}{3} = t'\\ t = 1-t'\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1-t\\ y = \dfrac{1}{3}+\dfrac{t}{3}\\ z = t\\ 1-(1-t') = \dfrac{3}{4}+t'\left(a-\dfrac{3}{4}\right)\\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{1-t'}{3} = t'\\ t = 1-t'\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1-t\\ y = \dfrac{1}{3}+\dfrac{t}{3}\\ z = t\\ t' = \dfrac{3}{4}+t'\left(a-\dfrac{3}{4}\right)\\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{1-t'}{3} = t'\\ t = 1-t'\end{array}\right.$$

   On obtient finalement $\left\{\begin{array}{l} x = 1-t\\ y = \dfrac{1}{3}+\dfrac{t}{3}\\ z = t\\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\times\left(a-\dfrac{3}{4}\right)\\ t' = \dfrac{1}{2}\\ t = 1-t'\end{array}\right.$ qui a une solution si et seulement si $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\times\left(a-\dfrac{3}{4}\right) \Leftrightarrow$ $a = \dfrac{1}{4}$.

   Remarque : *Au passage,on a trouvé les coordonnées du point d'intersection des deux droites* $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. *On a* $t = t' = \dfrac{1}{2}$ *et on reporte pour avoir* x, y, z.

Partie B

1. D'après la question précédente, dans ce cas, les diagonales (IJ) et (KL) du quadrilatère $IKJL$ sont sécantes en un point Ω. On vérifie que $\Omega\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ est bien le milieu de $[IJ]$ et $[KL]$.

   Rappel de la formule : le milieu de $[IJ]$ *a pour coordonnées* $\left(\dfrac{x_I+x_J}{2}, \dfrac{y_I+y_J}{2}, \dfrac{z_I+z_J}{2}\right)$.

On vérifie sans problème que l'on a bien $\left(\dfrac{x_I + x_J}{2}, \dfrac{y_I + y_J}{2}, \dfrac{z_I + z_J}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ et aussi $\left(\dfrac{x_K + x_L}{2}, \dfrac{y_K + y_L}{2}, \dfrac{z_K + z_L}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Les diagonales du quadrilatère $IKJL$ se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme.

On pouvait aussi montrer que $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{LJ}$ ont les mêmes coordonnées.

2. (a) Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK) si et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs directeurs **non colinéaires** de ce plan.

   Comme I, J, K définissent ce plan, ils sont non alignés et les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires.

   Le repère étant orthonormé, on peut utiliser l'expression analytique du produit scalaire.

   $\overrightarrow{IJ}\left(-1\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ 1\right)$ et donc $\overrightarrow{IJ} \bullet \vec{n} = -1 \times 8 + \dfrac{1}{3} \times 9 + 1 \times 5 = 0$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\vec{n}$ sont bien orthogonaux.

   De même : $\overrightarrow{KL}\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ -1\right)$ et donc $\overrightarrow{KL} \bullet \vec{n} = -\dfrac{1}{2} \times 8 + 1 \times 9 - 1 \times 5 = 0$.

   $\vec{n}$ est bien orthogonal à deux vecteurs non colinéaire de (IJK), il est bien normal à ce plan.

   (b) Le plan (IJK) a donc une équation cartésienne de la forme $8x + 9y + 5z + d = 0$. Comme le point I appartient à ce plan, ses coordonnées doivent vérifier cette équation :

   $8 \times 1 + 9 \times \dfrac{1}{3} + 5 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -11$...

   (c) *Je détaille le cas de M. Une manière de répondre à cette question est de chercher une représentation paramétrique de (BF) qui passe par $B(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{BF}(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$.*

   M est le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF). Ses coordonnées (x, y, z) doivent donc être solutions du système formé par les trois équations issues d'une représentation paramétrique de (BF) et l'équation $8x + 9y + 5z + d = 0$ du plan (IJK) :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 0 \times t \\ y = 0 + 0 \times t \\ z = 0 + 1 \times t \\ 8x + 9y + 5z - 11 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \\ 8 \times 1 + 9 \times 0 + 5 \times t - 11 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = \dfrac{3}{5} \\ t = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$$

   Les coordonnées du point M sont $\left(1\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{3}{5}\right)$.

   De même, les coordonnées de N sont solutions de

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 + 0 \times t \\ y = 1 + 0 \times t \\ z = 0 + 1 \times t \\ 8x + 9y + 5z - 11 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \\ 8 \times 0 + 9 \times 1 + 5 \times t - 11 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = \dfrac{2}{5} \\ t = \dfrac{2}{5} \end{array}\right.$$

   Les coordonnées du point N sont $\left(0\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{2}{5}\right)$.

   Une autre manière de répondre, est d'utiliser l'équation du plan (IJK) donnée dans la question précédente.

EXERCICE 2 — 5 points

1. (a) G est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est la composée de la fonction carrée suivie de la fonction exponentielle toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ (puis produit par $\dfrac{1}{2}$).

Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2$, ainsi $u'(x) = 2x$:

$G'(x) = \frac{1}{2} \times u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = \frac{1}{2} \times 2x\mathrm{e}^{x^2} = g(x)$

(b) $I_1 = \int_0^1 x^1\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_0^1 = G(1) - G(0) = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}$.

$$I_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}$$

(c) $I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n+1} \times x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

Posons $\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & x^{n+1} \\ v'(x) & = & x\mathrm{e}^{x^2} = g(x) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & (n+1)x^n \\ v(x) & = & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} = G(x) \end{array}\right.$

Toutes les fonctions sont continues car dérivables sur $[0~;~1]$; on peut donc intégrer par parties :

$I_{n+2} = \left[G(x)x^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e} - 0 - \frac{n+1}{2}\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}I_n$...

(d) On fait $n = 1$ dans l'égalité précédente : $I_3 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1+1}{2}I_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - I_1 = \frac{1}{2}$

On recommence avec $n = 3$: $I_5 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{3+1}{2}I_3 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - 1$.

$$I_3 = \frac{1}{2} \qquad I_5 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - 1$$

2. On remarque que $I_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}$ et que $I_{n+2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}I_n$.

⚠*Dans la boucle, on gère u avant n : on utilise la valeur de n entrante pour la nouvelle affectation de u.*

Étape	u	n	Commentaire
Initialisation	I_1	1	ce sont les valeurs en entrant dans la boucle
Première entrée Première sortie de la boucle	I_1 I_3	1 3	 on incrémente de 2 en 2
Seconde entrée Seconde sortie	I_3 I_5	3 5	
⋮	⋮	⋮	La dernière valeur vérifiant $n > 21$ est 19
Dernière entrée Dernière sortie	I_19 I_{21}	19 21	
Affichage	I_{21}		le terme obtenu en dernier

En sortie de cet algorithme, on obtient I_{21}.

3. (a) *Ici, il faut revenir à la définition de I_n*

Pour tout $x \in [0~;~1]$, $x^n\mathrm{e}^{x^2} \geqslant 0$ car « une fonction exponentielle » est positive. Comme I_n est donc l'intégrale d'une fonction positive, les bornes étant dans l'ordre croissant, finalement $I_n \geqslant 0$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0~;~1],\quad x \leqslant 1 \implies x^{n+1} \leqslant x^n$ on a multiplié par $x^n \geqslant 0$ et vérifié en 0

$\implies x^{n+1}\mathrm{e}^{x^2} \leqslant x^n\mathrm{e}^{x^2}$ on a multiplié par $\mathrm{e}^{x^2} > 0$

$\implies I_{n+1} \leqslant I_n$ par intégration de l'inégalité

Par définition, la suite (I_n) est décroissante.

(c) La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

4. Montrons par l'absurde que $\ell = 0$. Supposons donc $\ell \neq 0$.

On va « passer à la limite » dans la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}I_n$.

D'une part : comme $\ell \neq 0$, par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2}I_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}I_n = -\infty$

D'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \ell$

On devrait donc avoir $\ell = -\infty$, ce qui est absurde car $\ell \geqslant 0$ (voir la question 3.c)

Conclusion : $\ell = 0$

EXERCICE 3 — 6 points

Partie A : Conjecture graphique

Les solutions de l'équation (E) sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Il semble y en avoir 2. L'une comprise entre -1 et 0, l'autre entre 0 et 1.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x^3 = x^2(1+x)$. Comme un carré est positif ou nul, $x^2 + x^3$ est du signe de $1+x$.
   - $x^2 + x^3 = 0$ pour $x \in \{-1\,;\,0\}$.
   - $x^2 + x^3 > 0$ pour $x \in]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.
   - $x^2 + x^3 < 0$ pour $x \in]-\infty\,;\,-1[$.

   (b) x solution de $(E) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 3\left(x^2 + x^3\right) \Leftrightarrow x^2 + x^3 = \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$. Or, pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{3} > 0$, alors que $x^2 + x^3 < 0$ pour $x \in]\infty\,;\,-1[$. (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$.

   (c) $\mathrm{e}^0 = 1$ et $3 \times (0^2 + 0^3) = 0$. Donc 0 n'est pas solution de (E).

2. $\forall x \in]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$,

$$\begin{array}{lll} (E) & \Leftrightarrow & \mathrm{e}^x = 3\left(x^2 + x^3\right) & \\ & \Leftrightarrow & \ln \mathrm{e}^x = \ln\left(3\left(x^2 + x^3\right)\right) & a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b \\ & \Leftrightarrow & x = \ln 3 + \ln\left(x^2(1+x)\right) & \ln(ab) = \ln a + \ln b \\ & \Leftrightarrow & x = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) & \\ & \Leftrightarrow & \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x = 0 & \\ & \Leftrightarrow & h(x) = 0 & \end{array}$$

3. (a) h est une somme et composée de fonctions de référence dérivables, donc h est bien dérivable sur $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.

   Si $u > 0$ sur un intervalle, alors $\ln u$ est dérivable sur cet intervalle et sa dérivée est $\dfrac{u'}{u}$.

   Pour tout réel $x \in]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, $h'(x) = 0 + \dfrac{2x}{x^2} + \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{2(x+1) + x - x(x+1)}{x(x+1)}$

   On a bien : $h'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}$.

   (b) Pour étudier le sens de variations de h, on étudie le signe de sa dérivée.

   Les numérateurs et dénominateurs sont des trinômes du second degré.

   Pour le dénominateur, les racines sont 0 et -1, le coefficient dominant est $1 > 0$. Il est donc positif « à l'extérieur » des racines, négatif « entre » les racines (voir le tableau).

   Pour le numérateur, pas de racine évidente. On calcule donc le discriminant. On trouve : $\Delta = 12 > 0$ et les deux racines sont $x_1 = \dfrac{-2 + 2\sqrt{3}}{-2} = 1 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{3}$. Le coefficient dominant est $-1 > 0$, d'où le signe...

x	-1		$1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$-x^2+2x+2$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$x(x+1)$	0		$-$		0		$+$		
$h'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

   Étude des limites aux bornes :

- Limite en -1

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\lim_{x\to-1} \ln 3 - x = \ln 3 - 1\\
\left\{\begin{array}{lll}\displaystyle\lim_{x\to-1} x^2 &=& 1\\ \displaystyle\lim_{X\to 1} \ln X &=& 0\end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to-1} \ln x^2 = 0\\
\left\{\begin{array}{lll}\displaystyle\lim_{x\to-1} 1+x &=& 0\\ \displaystyle\lim_{X\to 0} \ln X &=& -\infty\end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to-1} \ln(1+x) = -\infty
\end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-1} h(x) = -\infty$$

- Limite en 0

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln 3 - x = \ln 3\\
\left\{\begin{array}{lll}\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 &=& 0\\ \displaystyle\lim_{X\to 0} \ln X &=& -\infty\end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to 0} \ln x^2 = -\infty\\
\left\{\begin{array}{lll}\displaystyle\lim_{x\to 0} 1+x &=& 1\\ \displaystyle\lim_{X\to 1} \ln X &=& 0\end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0
\end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} h(x) = -\infty$$

- Limite en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln 3 - x = -\infty\\
\left\{\begin{array}{lll}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 &=& +\infty\\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln X &=& +\infty\end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x^2 = +\infty\\
\left\{\begin{array}{lll}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+x &=& +\infty\\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln X &=& +\infty\end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty
\end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \text{on a la F.I. « } +\infty-\infty \text{ »}$$

$h(x) = \ln 3 + (x+1)\left(\dfrac{2\ln x}{x+1} + \dfrac{\ln(1+x)}{x+1} - \dfrac{x}{x+1}\right)$.

Or

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$
- $\left\{\begin{array}{lll}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+x &=& +\infty\\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} &=& 0\end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x+1} = 0$
- Pour tout $x > 1, 0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x+1} < \dfrac{\ln x}{x}$. Par comparaison, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et le théorème des gendarmes assure que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x+1} = 0$

  Finalement avec des opérations élémentaires, on obtient enfin $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

  Pour avoir le tableau de variations complet, il nous faut encore les signes de $h\left(1-\sqrt{3}\right) < 0$ et $h(1+\sqrt{3}) > 0$ que l'on obtient avec la calculatrice.

x	-1		$1-\sqrt{3}$		0		α_1	$1+\sqrt{3}$	α_2	$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖		$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖ $-\infty$	↗	$h(1-\sqrt{3})$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	$h(1+\sqrt{3})$	0	↘ $-\infty$

(c) - Sur l'intervalle $]-1\,;\,0[$, la dérivée s'annule en changeant de signe $(+;-)$, donc $h(1-\sqrt{3})$ est un maximum pour h sur cet intervalle. Or $h(1-\sqrt{3}) < 0$ donc l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-1\,;\,0[$. C'est une première contradiction avec la conjecture de la partie A.
- Sur l'intervalle $]0\,;\,1+\sqrt{3}[$ la fonction h est dérivable, donc continue ; 0 est compris entre $\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x)$ et $h\left(1+\sqrt{3}\right)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet donc au

moins une solution sur $\left[0\ ;\ 1+\sqrt{3}\right[$. Comme h est strictement monotone sur cet intervalle, cette solution α_1 est unique.
La calculatrice donne : $h(0,61) \approx -0,02$ et $h(0,62) \approx 0,24$.
0 est donc compris entre $h(0,61)$ et $h(0,62)$, le raisonnement précédent assure donc que $\alpha_1 \in [0,61\ ;\ 0,62]$.
On trouve de même que $0,618 < \alpha_1 < 0,619$
Une valeur approchée de α_1, arrondie au centième est donc $0,62$.

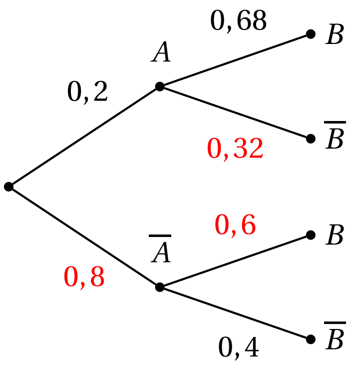
- Comme $h(1+\sqrt{3}) > 0$, 0 est aussi compris entre $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $h\left(1+\sqrt{3}\right)$. Le même raisonnement assure donc l'existence d'une autre solution dans cet intervalle. Voir le tableau.
Avec la calculatrice, on trouve 7,12 comme valeur approchée de α_2, arrondie au centième.

(d) La conjecture de la partie A est erronée. Il y a bien deux solutions mais pas dans les intervalles prévus !

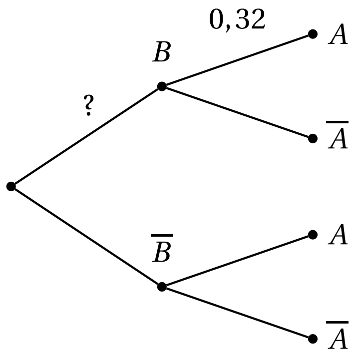
EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On a complété en rouge le premier arbre :



et on l'inverse :



Avec la formule des probabilités totales, on calcule d'abord $p(B)$.
$p(B) = p(A\cap B) + p(\overline{A}\cap B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B) = 0,2\times 0,68 + 0,8\times 0,6 = 0,616$.
On peut ajouter 0,616 à la place du ? sur l'arbre inversé.
Enfin, la formule des probabilités conditionnelles : $p_A(B) = \dfrac{p(A\cap B}{p(B)} = \dfrac{0,2\times 0,68}{0,616} \approx 0,22$.
Donc $p_A(B) \neq 0,32$.
L'affirmation est fausse

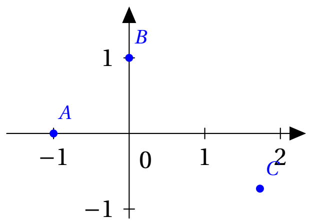
2. L'urne contient $n+3$ boules. L'univers est l'ensemble des paires de boules tirées. Comme elles sont « indiscernables » au toucher, il y a équiprobabilité.
Le nombre de tirages possibles est $\dbinom{n+3}{2} = \dfrac{(n+3)(n+2)}{2}$.
Le nombre de tirages contenant 2 boules rouges est $\dbinom{n}{2}$.
Le nombre de tirages contenant 2 boules noires est $\dbinom{3}{2}$.
Le nombre de tirages contenant 1 boule de chaque couleur est $\dbinom{n+3}{2} - \dbinom{n}{2} - \dbinom{3}{2}$ ou bien $\dbinom{3}{1} \times \dbinom{n}{1} = 3n$.
Un tirage simultané peut être assimilé à un tirage successif sans remise).
La probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est donc $\dfrac{3n\times 2}{(n+3)(n+2)}$

Le problème revient à résoudre $\dfrac{3n\times 2}{(n+3)(n+2)}=\dfrac{9}{22}\Leftrightarrow 3n^2-29n+18=0$.
C'est une équation du second degré. On cherche une solution entière positive. Plusieurs façons de répondre ici :

- On peut calculer le discriminant, il est positif, puis les solutions 9 et $\dfrac{2}{3}$...
- On peut aussi utiliser les variations que l'on connait bien ! On affiche la courbe, et on vérifie que 9 est OK.

L'affirmation est vraie.

3. *On peut chercher l'écriture complexe de la rotation de centre A d'affixe* $3-2\text{i}$ *et d'angle* $-\dfrac{\pi}{2}$ *ou justifier que l'on a bien l'écriture complexe d'une rotation puis vérifier que A est invariant et que l'angle est le bon.*
La rotation de centre A d'affixe $3-2\text{i}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe $z'=\text{e}^{\text{i}\frac{-\pi}{2}}\left(z-z_A\right)+z_A$. Soit $z'=-\text{i}(z-3+2\text{i})+3-2\text{i}\Leftrightarrow z'=-\text{i}z+3\text{i}+2+3-2\text{i}\Leftrightarrow z'=-\text{i}z+5+\text{i}$
L'affirmation est vraie.
4. On sait que $z\overline{z}=|\,z\,|^2$. Donc $(E)\Rightarrow z^2=|\,z\,|^2+1$.
Ces deux nombres complexes devraient avoir le même module, ce qui conduit à $|\,z\,|^2=|\,z\,|^2+1$, équation qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. (Dans $\mathbb{C}$ non plus d'ailleurs !).
L'affirmation est fausse.
5. On place les trois points pour « voir ».



L'angle en A pourrait convenir. Or, $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)$.
$\dfrac{c-a}{b-a}=\dfrac{\sqrt{3}+\text{i}(1-\sqrt{3})+1}{\text{i}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}+1+\text{i}(1-\sqrt{3}))(1-\text{i})}{(1+\text{i})(1-\text{i})}=\dfrac{\sqrt{3}+1+\text{i}(1-\sqrt{3})+1-\sqrt{3}-\text{i}\sqrt{3}-\text{i}}{2}=\dfrac{2-2\text{i}\sqrt{3}}{2}$.
Finalement $\dfrac{c-a}{b-a}=1-\text{i}\sqrt{3}=2\left(\dfrac{1}{2}-\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=-\dfrac{\pi}{3}\qquad(2\pi)$.
Dans le triangle ABC l'angle en A est égal à 60°.
L'affirmation est vraie.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On vérifie qu'un tel couple est bien solution de (E). Pour tout entier relatif k, on a :
$3(9+2k)-2(13+3k)=27+6k-26-6k=1$.
On a prouvé que tous les couples de cette forme sont solutions de (E). On n'a pas prouvé que ce sont les seuls... mais on a déjà résolu un certain nombre d'équations diophantiennes, et on sait qu'ils ont la bonne forme.
Certains correcteurs pourraient ici vouloir le détail de la résolution proprement dite...
L'affirmation est vraie.
2. *Une rapide exploration avec le tableur de la calculatrice laisse penser que l'affirmation est vraie : on n'échappe pas à une preuve rigoureuse !*
Notons d le PGCD de a et b.

- Comme d divise a et b, il divise toute combinaison linéaire de a et b, donc en particulier $3b-2a=7$. d est donc un diviseur (positif) de 7, c'est donc 1 ou 7.
- Supposons que $n \equiv 2 \quad (7)$. Montrons qu'alors $d=7$.
  $n \equiv 2 \quad (7) \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} a \equiv 3\times 2+1 & (7) \\ b \equiv 2\times 2+3 & (7)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} a \equiv 0 & (7) \\ b \equiv 0 & (7)\end{array}\right. \Rightarrow$ 7 est un diviseur commun à a et b
  dans ce cas, le PGCD est bien 7.
- Réciproquement, supposons que $d=7$, montrons qu'alors $n \equiv 2 \quad (7)$.
  $d=7 \Rightarrow 7 \mid a \Rightarrow 3n+1 \equiv 0 \quad (7) \Rightarrow 3n \equiv -1 \quad (7)$
  ⚠, il ne faut pas se laisser tenter par la division ! On veut bien inverser 3, il nous faut un multiple de 3 congrue à 1 modulo 7. 15 est parfait. On multiplie donc par 5 :
  $d=7 \Rightarrow 15n \equiv -5 \quad (7) \Rightarrow n \equiv 2 \quad (7)$
  car $15 \equiv 1 \quad (7)$ et $-5 \equiv -5+7 \quad (7)$

L'affirmation est vraie.

3. L'affirmation est « pour tout entier n... ». Pour montrer qu'elle est fausse, il suffit d'exhiber un contre exemple !
   Si $n=0$, alors $a=21, b=2$. La division euclidienne de a par b s'écrit : $21 = 10\times 2+1$
   Le quotient est 10 alors que $n+2=2$.
   L'affirmation est fausse
   Pour une recherche systématique (inutile ici) :
   Le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement égaux à $n+2$ et $n+17$ si et seulement si $a=(n+2)b+(n+17)$ avec $0 \leqslant n+17 < b$.
   On vérifie la première condition :
   $(n+2)b+(n+17) = (n+2)(2n+2)+(n+17) = 2n^2+4n+2n+4+n+17 = 2n^2+7n+21 = a$
   On vérifie la seconde condition :
   $0 \leqslant n+17$ est toujours vraie car n est un entier naturel.
   $n+17 < b \iff n+17 < 2n+2 \iff 15 < n$. On voit que cette condition n'est pas toujours réalisée...
4. On sait que la similitude directe réciproque de s a pour centre A, rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et angle $-\dfrac{\pi}{4}$.
   $z' = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}z+\dfrac{-1+7\mathrm{i}}{2}$ est bien l'écriture complexe d'une similitude directe car elle est de la forme $z' = az+b$ avec $a=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2} \in \mathbb{C}^*$ et $b=\dfrac{-1+7\mathrm{i}}{2}$.
   - l'affixe du centre est l'unique solution de $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}z+\dfrac{-1+7\mathrm{i}}{2}$.
     On teste si l'affixe de A est solution : si $z=3+4\mathrm{i}$, alors
     $\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}z+\dfrac{-1+7\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}(3+4\mathrm{i})+\dfrac{-1+7\mathrm{i}}{2} = \dfrac{3+4\mathrm{i}-3\mathrm{i}+4-1+7\mathrm{i}}{2} = \dfrac{6+8\mathrm{i}}{2} = 3+4\mathrm{i} = z_A$.
     Le centre est bien A.
   - le rapport est $\mid a \mid = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
   - l'angle est $arg(a) = arg\left(\dfrac{1-i}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4} \quad (2\pi)$

   L'affirmation est vraie.
5. *Cette similitude existe bien car les points sont deux à deux distincts.*
   La similitude directe qui transforme A en C et B en D a pour angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$, soit $arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right)$.
   $\dfrac{d-c}{b-a} = \dfrac{4+\sqrt{3}+4\mathrm{i}\sqrt{3}-1+2\sqrt{3}-\mathrm{i}(3+\sqrt{3})}{4-\mathrm{i}-1-2\mathrm{i}} = \dfrac{3+3\sqrt{3}+\mathrm{i}(-3+3\sqrt{3})}{3-3\mathrm{i}} = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}+\mathrm{i}(-1+\sqrt{3})\right)(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}$
   $\dfrac{d-c}{b-a} = \dfrac{1+\sqrt{3}+\mathrm{i}(-1+\sqrt{3})+\mathrm{i}+\mathrm{i}\sqrt{3}-(-1+\sqrt{3})}{2} = \dfrac{2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1+2\mathrm{i}$, $b = 4-\mathrm{i}$, $c = 1-2\sqrt{3}+\mathrm{i}(3+\sqrt{3})$ et $d = 4+\sqrt{3}+4\mathrm{i}\sqrt{3}$.

La similitude directe qui transforme A en C et B en D a donc pour angle $\dfrac{\pi}{3}$.

L'affirmation est vraie.