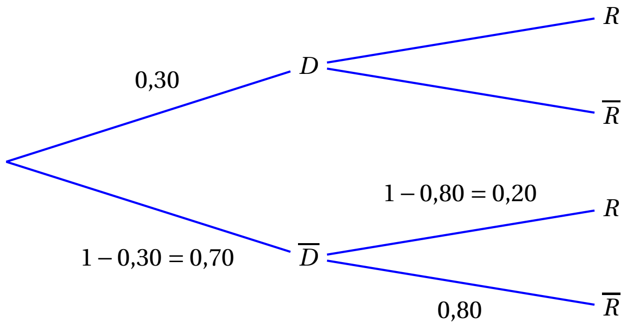
Corrigé du baccalauréat ES Centres étrangers
12 juin 2014

Exercice 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. On prend un candidat au hasard et on note :
   - D l'évènement « le candidat a un dossier jugé de bonne qualité » ;
   - R l'évènement « le candidat est recruté par l'entreprise ».

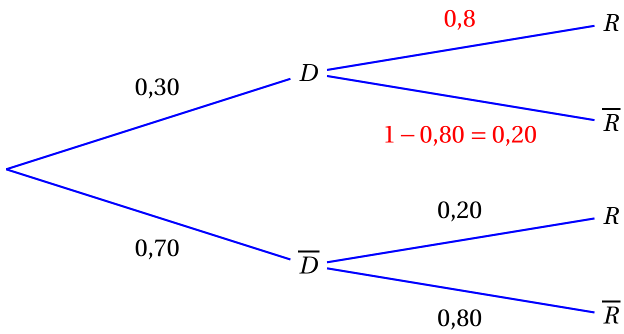
   a. On représente la situation par un arbre pondéré :



   b. Le candidat n'a pas un dossier de bonne qualité et n'est pas recruté par l'entreprise correspond à l'événement $\overline{D} \cap \overline{R}$.
   D'après l'arbre pondéré, on peut dire que $P(\overline{D} \cap \overline{R}) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$.

   c. D'après le texte, on sait que $P(R) = 0,38$.
   En utilisant la formule des probabilités totales : $P(R) = P(D \cap R) + P(\overline{D} \cap R)$
   donc $0,38 = P(D \cap R) + 0,7 \times 0,2 \iff 0,38 - 0,14 = P(D \cap R) \iff P(D \cap R) = 0,24$

   d. Un candidat est recruté sachant que son dossier est jugé de bonne qualité correspond à l'événement $P_D(R)$.
   $P_D(R) = \dfrac{P(D \cap R)}{P(D)} = \dfrac{0,24}{0,3} = 0,8$
   On peut donc compléter l'arbre pondéré :



2. Dix personnes postulent pour un emploi dans l'entreprise. Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment les unes des autres. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les 10 personnes.

   a. La probabilité qu'une personne soit recrutée est $p = 0,38$.
   Dix personnes postulent pour un emploi dans l'entreprise. Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment les unes des autres, on est donc dans un cas de répétition de 10 épreuves indépendantes ; la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes recrutées par l'entreprise suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,38$.

b. Dans le cas d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, on sait que la probabilité d'obtenir k succès est :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k}$$

On demande la probabilité qu'au moins une des dix personnes soit recrutée, c'est-à-dire $P(X \geqslant 1)$.

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{10}{0} \times 0{,}38^0 \times (1-0{,}38)^{10-0} = 1 - 0{,}62^{10} \approx 0{,}992$

3. Coralie arrive à 8 h 30 alors qu'Aymeric arrive au hasard entre 8 h et 9 h.
On désigne par T la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée d'Aymeric et on admet que T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[8\,;9]$.
Pour que Coralie attende Aymeric plus de dix minutes, il faut qu'Aymeric arrive après 8 h 40, c'est-à-dire entre 8 h 40 et 9 h ; la période de temps est de 40 minutes. De plus 40 minutes correspondent à $\dfrac{2}{3}$ d'heure ; on cherche donc $P\left(8 + \dfrac{2}{3} < T \leqslant 9\right)$.

Comme T suit une loi uniforme sur $[8\,;9]$, $P\left(8 + \dfrac{2}{3} < T \leqslant 9\right) = \dfrac{9 - \left(8 + \dfrac{2}{3}\right)}{9-8} = \dfrac{1}{3}$.

La probabilité que Coralie attende Aymeric plus de 10 minutes est donc de $\dfrac{1}{3}$.

Exercice 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2-1}$.

1. a. f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
D'après la formule de dérivation d'un produit :
$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{x^2-1} + x \times \left(2x\mathrm{e}^{x^2-1}\right) = \left(2x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$

b. Pour tout réel x, $2x^2+1 > 0$ et $\mathrm{e}^{x^2-1} > 0$ donc $f'(x) > 0$; la fonction f est donc strictement croissante dur $\mathbb{R}$.

2. On admet que pour tout réel x, $f''(x) = 2x\left(2x^2+3\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$.
La fonction f est convexe sur les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels sa dérivée f' est croissante, autrement dit quand sa dérivée seconde f'' est positive.
$f''(x) > 0 \iff 2x\left(2x^2+3\right)\mathrm{e}^{x^2-1} > 0 \iff x > 0$ car, pour tout x, $2x^2+3 > 0$ et $\mathrm{e}^{x^2-1} > 0$.
La fonction f est donc convexe sur $]0\,; +\infty[$.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\left(1 - \mathrm{e}^{x^2-1}\right)$.

a. On résout l'inéquation $1 - \mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0 &\iff 1 \geqslant \mathrm{e}^{x^2-1} \\ &\iff \ln 1 \geqslant x^2 - 1 \qquad \text{(la fonction ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\text{)} \\ &\iff 0 \geqslant (x-1)(x+1) \\ &\iff -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'inéquation $1 - \mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0$ est donc l'intervalle $[-1\,;1]$.

b. Sur l'intervalle $[-1\,;1]$, $1 - \mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0$ donc $h(x) = x\left(1 - \mathrm{e}^{x^2-1}\right)$ a le signe de x sur $[-1\,;-1]$:
$h(x) < 0$ sur $]-1\,;0[$ et $h(x) > 0$ sur $]0\,;1[$; de plus $h(-1) = h(0) = h(1) = 0$.

c. $h(x) = x - f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$, donc sur cet intervalle la droite D d'équation $y = x$ est située au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f.

4. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^2 - \mathrm{e}^{x^2-1}\right)$ et soit $I = \displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$.

On admet que H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

Comme h est une primitive de h, $I = \displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = H(1) - H(0) = 0 - \left(-\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{2}\right) = \dfrac{1}{2\,\mathrm{e}}$

Partie B : Applications

1. Le pourcentage de la masse salariale détenue par 80 % des employés ayant les salaires les plus faibles dans l'entreprise F est donné par $f(0{,}8) \approx 0{,}558$; il est donc à peu près de 56 %.

2. On note $\mathscr{A}_f$ l'aire du domaine délimité par la droite D, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

On appelle indice de Gini associé à la fonction f, le nombre réel noté I_f et défini par $I_f = 2 \times \mathscr{A}_f$.

a. D'après le cours et ce qui a été vu dans les questions précédentes :
$\mathscr{A}_f = \displaystyle\int_0^1 \left(x - f(x)\right)\mathrm{d}x = I = \dfrac{1}{2\,\mathrm{e}}$; donc $I_f = 2 \times \mathscr{A}_f = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

b. *On peut répondre à cette question par des considérations géométriques ou analytiques.*

- Sur $[0;1]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est entièrement située au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$; donc l'aire comprise entre la droite D, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est plus petite que l'aire comprise entre la droite D, la courbe $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Ce qui entraine que $I_f < I_g$.
- On peut calculer I_g :
$I_g = 2\displaystyle\int_0^1 \left(x - g(x)\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \left(x - x^3\right)\mathrm{d}x = 2\left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

On peut donc dire que l'entreprise pour laquelle la distribution des salaires est la plus égalitaire est l'entreprise F.

Exercice 3 — 5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Dans une ville, un nouveau lycée vient d'ouvrir ses portes et accueille pour sa première rentrée 500 élèves. D'une année sur l'autre, le proviseur du lycée prévoit une perte de 30 % de l'effectif et l'arrivée de 300 nouveaux élèves.
On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au lycée pour l'année $2013 + n$, avec n entier naturel. On a donc $u_0 = 500$.

1. a. En 2014, il part 30 % d'élèves donc il en reste 70 % : $500 \times 0{,}70 = 350$.

On sait que chaque année, 300 nouveaux élèves arrivent.

En 2015, il y en aura donc $350 + 300 = 650$.

b. En 2015, le lycée garde $650 \times 0{,}70 = 455$ élèves, auxquels il faut ajouter les 300 nouveaux : en 2015 il y aura donc $455 + 300 = 755$ élèves.

2. Pour déterminer le nombre d'élèves u_{n+1} du lycée l'année $2013+(n+1)$, on garde 70 % du nombre d'élèves de l'année $2013 + n$, soit $0{,}7u_n$, et on ajoute 300.

Donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 300$.

3. On souhaite, pour un entier n donné, afficher tous les termes de la suite (u_n) du rang 0 au rang n ; il faut donc choisir un algorithme qui effectuera $n + 1$ affichages de la variable u donnant la valeur de u_n.

L'algorithme 1 effectue n affichages ; l'algorithme 3 effectue un seul affichage en sortie de boucle.

L'algorithme permettant d'obtenir le résultat souhaité est donc l'algorithme 2.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 1000$.

On a donc $u_n = v_n + 1000$.

a. Pour tout n :
$v_{n+1} = u_{n+1} - 1\,000 = 0{,}7u_n + 300 - 1000 = 0{,}7\,(v_n + 1\,000) - 700 = 0{,}7v_n + 700 - 700 = 0{,}7v_n$
$v_0 = u_0 - 1\,000 = 500 - 1\,000 = -500$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}7$ et de premier terme $v_0 = -500$.

b. La suite (v_n) est géométrique donc, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = -500 \times 0{,}7^n$.
Or $u_n = v_n + 1\,000$ donc, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,000 - 500 \times 0{,}7^n$.

c. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,7 ; or $0 \leqslant 0{,}7 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente et a pour limite 0.
Pour tout n, $u_n = v_n + 1\,000$ donc la suite (u_n) est convergente et a pour limite 1 000.

d. On peut dire que le nombre d'élèves du lycée va tendre vers 1 000.
On peut aussi démontrer que la suite (u_n) est croissante.

5. a. On résout l'inéquation $u_n \geqslant 990$:

$$\begin{aligned} u_n \geqslant 990 &\iff 1\,000 - 500 \times 0{,}7^n \geqslant 990 \\ &\iff 10 \geqslant 500 \times 0{,}7^n \\ &\iff \frac{10}{500} \geqslant 0{,}7^n \\ &\iff \ln\frac{1}{50} \geqslant n \times \ln 0{,}7 && \text{(croissance de la fonction ln)} \\ &\iff \frac{\ln\frac{1}{50}}{\ln 0{,}7} \leqslant n && \text{(car } \ln 0{,}7 < 0\text{)} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\frac{1}{50}}{\ln 0{,}7} \approx 10{,}97$ donc $u_n \geqslant 990 \iff n \geqslant 11$.

b. D'après la question précédente, $u_n \geqslant 990$ si $n \geqslant 11$; donc à partir de l'année $2013 + 11 = 2024$, il y aura plus de 990 élèves dans le lycée.

Exercice 3 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Étude d'un graphe

On appelle $\mathcal{G}$ le graphe donné dans le texte.

1. a. Dans le graphe $\mathcal{G}$, il y a des sommets, par exemple A et E, qui ne sont pas reliés par une arête, donc le graphe $\mathcal{G}$ n'est pas complet.

b. Deux sommets quelconques du graphe $\mathcal{G}$ sont reliés par un chemin, donc le graphe $\mathcal{G}$ est connexe.

2. a. Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes arrivant (ou partant) de ce sommet.
Le tableau ci-dessous donne les degrés de chaque sommet :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Degré	4	5	4	4	2	2	3	4	2

Un cycle eulérien est un trajet qui part de n'importe quel sommet et qui revient au même sommet en étant passé une fois et une seule par chaque arête. Un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si chacun de ses sommets est de degré pair ; ce n'est pas le cas du graphe $\mathcal{G}$, donc le graphe $\mathcal{G}$ n'admet pas de cycle eulérien.
Une chaîne eulérienne est un trajet qui part d'un sommet et qui passe par toutes les arêtes une fois et une seule. Un graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement s'il possède exactement deux sommets de degrés impairs. C'est le cas du graphe $\mathcal{G}$, donc le graphe $\mathcal{G}$ admet une chaîne eulérienne. Cette chaîne part d'un des deux sommets de degré impair et arrive à l'autre.
Exemple de chaîne eulérienne : B – F – D – B – E – D – A – B – C – A – H – C – G – I – H – G

3. **a.** La matrice d'adjacence M associée au graphe est une matrice carrée d'ordre 9 (le nombre de sommets), ne contenant que des 0 et des 1. Si une arête relie le sommet numéro i (avec $1 \leqslant i \leqslant 9$) au sommet numéro j (avec $1 \leqslant j \leqslant 9$), on mettra un 1 à la ligne i et la colonne j de la matrice ; sinon on mettra un 0.

Donc la matrice d'adjacence du graphe $\mathscr{G}$ est : $M = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&0&0&0&1&0\\ 1&0&1&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&1&0\\ 1&1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0 \end{pmatrix}$

b. On donne : $M^2 = \begin{pmatrix} 4&2&2&1&2&2&2&1&1\\ 2&5&1&3&1&1&1&2&0\\ 2&1&4&2&1&1&1&2&2\\ 1&3&2&4&1&1&0&1&0\\ 2&1&1&1&2&2&0&0&0\\ 2&1&1&1&2&2&0&0&0\\ 2&1&1&0&0&0&3&2&1\\ 1&2&2&1&0&0&2&4&1\\ 1&0&2&0&0&0&1&1&2 \end{pmatrix}$.

$M^3 = M^2 \times M$ donc le coefficient situé à la 7$^{\text{e}}$ ligne et 4$^{\text{e}}$ colonne de la matrice M^3 s'obtient en faisant le produit de la 7$^{\text{e}}$ ligne de la matrice M^2 par la 4$^{\text{e}}$ colonne de la matrice M, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 2&1&1&0&0&0&3&2&1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0\\1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} = 2\times1+1\times1+1\times0+0\times0+0\times1+0\times1+3\times0+2\times0+1\times0 = 3$$

Remarque : comme on peut écrire M^3 sous la forme $M \times M^2$, on aurait pu aussi calculer le coefficient cherché en faisant le produit de la 7$^{\text{e}}$ ligne de la matrice M par la 4$^{\text{e}}$ colonne de la matrice M^2.

Partie B : Applications

On donne dans le texte le plan simplifié d'un lycée.

1. Le graphe $\mathscr{G}$ donné en partie A modélise cette situation.

En utilisant les degrés de chaque sommet du graphe $\mathscr{G}$, on peut établir la correspondance entre ce graphe et le plan ; le degré de chaque sommet correspond au nombre de portes de chaque lieu du lycée.

Sommet	Lieu correspondant dans le lycée
A	ADMINISTRATION
B	HALL 1
C	HALL 2
D	SALLE DES PROFESSEURS
E	C.D.I.
F	CANTINE
G	BÂTIMENT 1
H	VIE SCOLAIRE ET INFIRMERIE
I	BÂTIMENT 2

2. Un élève a cours de mathématiques dans le bâtiment 1. À la fin du cours, il doit rejoindre la salle des professeurs pour un rendez vous avec ses parents.

Le lieu « BÂTIMENT 1 » correspond au sommet G (n° 7), et le lieu « salle des professeurs » correspond au sommet D (n° 4) ; il s'agit donc dans cette question de déterminer le nombre de chemins de longueur 3 reliant le sommet G au sommet D. C'est le nombre que l'on trouvera dans la matrice M^3 à la 7ᵉ ligne et 4ᵉ colonne. D'après la question A.3.b. ce nombre vaut 3 ; il y a donc trois chemins de longueur 3 reliant le bâtiment 1 à la salle des professeurs.

Ce sont les chemins :

G – H – A – D : BÂTIMENT 1	VIE SCOLAIRE	ADMINISTRATION	SALLE DES PROFESSEURS
G – C – A – D : BÂTIMENT 1	HALL 2	ADMINISTRATION	SALLE DES PROFESSEURS
G – C – B – D : BÂTIMENT 1	HALL 2	HALL 1	SALLE DES PROFESSEURS

3. Le lycée organise une journée portes-ouvertes.

a. Visiter le lycée en empruntant une seule fois chaque passage entre les différents lieux, revient à parcourir le graphe $\mathcal{G}$ en passant par chaque arête une fois et une seule.

On a vu dans la partie A que c'était possible : il faut simplement partir du HALL 1 (sommet B) et arriver au BÂTIMENT 1 (sommet G) ou le contraire.

b. Sur les arêtes du graphe $\mathcal{G}$, on a indiqué les temps de parcours exprimés en seconde entre deux endroits du lycée.

L'algorithme de Dijkstra donne tous les chemins minimaux partant du sommet G, donc le chemin minimal allant de G à D :

G	A	B	C	D	E	F	H	I	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	G
	∞	∞	90 G	∞	∞	∞	40 G	20 G	I (G)
	∞	∞	90 G	∞	∞	∞	40 G ~~45 I~~		H (G)
	100 H	∞	~~90 G~~ 65 H	∞	∞	∞			C (H)
	100 H ~~110 C~~	95 C		∞	∞	∞			B (C)
	100 H ~~125 B~~			175 B	145 B	130 B			A (H)
				~~175 B~~ 170 A	145 B	130 B			F (B)
				~~170 A~~ 165 F	145 B				E (B)
				165 F					D (F)

Le trajet le plus rapide pour aller de G à D est : $\text{G} \xrightarrow{40} \text{H} \xrightarrow{25} \text{C} \xrightarrow{30} \text{B} \xrightarrow{35} \text{F} \xrightarrow{35} \text{D}$

Le temps minimal est de 165 secondes.

Exercice 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque cartouche produite, associe sa durée de vie exprimée en nombre de pages.

On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

a. Affirmation 1 : Environ 95 % des cartouches produites ont une durée de vie comprise entre 230 et 270 pages.

On cherche $P(230 \leqslant X \leqslant 270)$ sachant que la variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres $\mu = 250$ et $\sigma = 10$.

Or $230 = 250 - 20 = \mu - 2\sigma$ et $270 = 250 + 20 = \mu + 2\sigma$.

On sait que pour une loi normale de paramètres μ et σ, $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 95\,\%$.

On peut donc dire qu'il y a 95 % de chances que la durée de vie des cartouches soit comprise entre 230 et 270 pages, ce qui n'est pas l'affirmation proposée.

Donc **l'affirmation 1 est fausse**.

b. Affirmation 2 : Moins de 50 % des cartouches produites ont une durée de vie inférieure à 300 pages.

La probabilité qu'une cartouche ait une durée de vie inférieure à 300 est $P(X \leqslant 300)$. D'après les propriétés de la loi normale, comme l'espérance est $\mu = 250$, on sait que $P(X \leqslant 250) = 0{,}5$. De plus, $300 > 250$ donc $P(X \leqslant 300) > P(X \leqslant 250)$ donc $P(X \leqslant 300) > 0{,}5$.

L'affirmation 2 est fausse.

2. L'entreprise Printfactory a amélioré son procédé industriel et déclare que 80 % des cartouches produites ont une durée de vie supérieure à 250 pages. Un contrôleur désigné par l'entreprise effectue un test en prélevant de façon aléatoire un échantillon de cartouches dans la production.

Dans un échantillon de taille 1 000, le contrôleur a obtenu 240 cartouches vides d'encre avant l'impression de 250 pages.

Affirmation 3 : Le contrôleur valide la déclaration de l'entreprise.

On va déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95%; comme 80% des cartouches doivent avoir une durée de vie supérieure à 250 pages, on prend $p = 0{,}80$.

L'échantillon est de taille $n = 1\,000$.

On a $n = 1\,000 \geqslant 30$, $np = 8005$ et $n(1-p) = 200 \geqslant 5$.

Les conditions d'approximation sont réalisées donc on peut prendre comme intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$\left[p - 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}8 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}8 \times 0{,}2}}{\sqrt{1\,000}}\,;\, 0{,}8 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}8 \times 0{,}2}}{\sqrt{1\,000}}\right]$$
$$\approx [0{,}775\,;\, 0{,}825]$$

Le contrôleur a trouvé 240 cartouches vides sur 1 000 donc une fréquence de cartouches ayant une durée de vie supérieure à 250 pages de $\dfrac{1\,000 - 240}{1\,000} = 0{,}76$.

$0{,}76 \not\in [0{,}775\,;\, 0{,}825]$ donc il ne faut pas valider la déclaration de l'entreprise.

L'affirmation 3 est fausse.

3. Affirmation 4 : L'entreprise doit interroger au moins un quart de ses clients.

Un intervalle de confiance au niveau 95% est donné par $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$, où f est la fréquance observée dans l'échantillon et n la taille de l'échantillon.

Pour que cet intervalle ait une amplitude inférieure ou égale à 4% soit 0,04, il faut que la longueur de l'intervalle soit inférieure ou égale à 0,04, c'est-à-dire $\left(f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 0{,}04$ ce qui équivaut à $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}04$.

On résout cette inéquation : $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}04 \iff \dfrac{2}{0{,}04} \leqslant \sqrt{n} \iff 50 \leqslant \sqrt{n} \iff 2\,500 \leqslant n$

Il faut donc interroger au moins 2 500 clients, soit au moins un quart des 100 000 clients.

L'affirmation 4 est vraie.