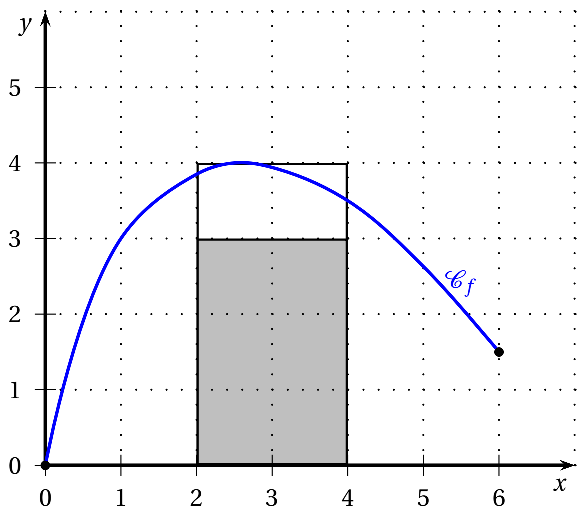
Corrigé du baccalauréat ES/L Amérique du Sud

24 novembre 2016

EXERCICE 1 **Commun à tous les candidats** **4 points**

1. La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.



On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. Un encadrement de I est :

a. $0 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 2$ **b.** $2 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 4$ **c.** $4 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 6$ **d.** $\boxed{6 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 8}$

Voir graphique.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^x - 3x^2$.
La courbe représentative de g admet un point d'inflexion qui a pour abscisse :

a. 1 **b.** 0 **c.** $\boxed{\ln 3}$ **d.** $\ln 2$

Un point d'inflexion est un point où la représentation graphique traverse sa tangente. C'est donc un point où la dérivée seconde s'annule et change de signe.
$g'(x) = 2\,\mathrm{e}^x - 6x$; $g''(x) = 2\,\mathrm{e}^x - 6$ et $g''(x) = 0 \iff x = \ln 3$

3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;\,0,6)$.
La probabilité qui admet pour valeur approchée $0,012$ est :

a. $p(X = 2)$ **b.** $p(X \geqslant 2)$ **c.** $\boxed{p(X \leqslant 2)}$ **d.** $p(X < 2)$

On trouve ce résultat à la calculatrice.

4. Une société de vente en ligne de chaussures souhaite connaître la proportion d'articles présentant un défaut de coloris. Pour cela, on prélève au hasard dans le stock 400 paires de chaussures. On constate que 24 paires présentent ce défaut.

   L'intervalle de confiance, au seuil de confiance de 95 %, de la proportion p de paires de chaussures présentant un défaut de coloris est :

   a. [0,89 ; 0,99] **b.** $\boxed{[0{,}01\,;\,0{,}11]}$ **c.** [0,05 ; 0,07] **d.** [0,92 ; 0,96]

   L'intervalle de confiance est donné par $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[\dfrac{24}{400}-\dfrac{1}{\sqrt{400}}\ ;\ \dfrac{24}{400}+\dfrac{1}{\sqrt{400}}\right]=$ $[0,06-0,05\ ;\ 0,06+0,05]=[0,01\ ;\ 0,11]$

EXERCICE 2 Commun à tous les candidats 6 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;45]$ par $g(x)=-20x+5x\ln(x)+30$.

1. **a.** On note g' la fonction dérivée de g.

   $g'(x)=-20+\left(5\times\ln(x)+5x\times\dfrac{1}{x}\right)=-20+5\ln(x)+5=-15+5\ln(x)$

   b. $-15+5\ln(x)\geqslant 0 \iff 5\ln(x)\geqslant 15$
   $\iff \ln(x)\geqslant 3$
   $\iff x\geqslant \mathrm{e}^3$

   c. $g(1)=10$; $g(\mathrm{e}^3=-20\mathrm{e}^3+5\mathrm{e}^3\times 3+30=30-5\mathrm{e}^3\approx -70,43$;
   $g(45)=-900+225\ln(45)+30=225\ln(45)-870\approx -13,50$

   On dresse le tableau de variations de la fonction g sur $[1\ ;\ 45]$:

x	1		e^3		45
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	10	$\searrow$	$-70,43$	$\nearrow$	$-13,50$

2. **a.** On complète le tableau de variations de g :

x	1		α		e^3		45
$g(x)$	10	$\searrow$	0	$\searrow$	$-70,43$	$\nearrow$	$-13,50$

   D'après ce tableau de variations, on peut conclure que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1\ ;\ 45]$.

   b. On trouve à la calculatrice :

   $\left.\begin{array}{l} g(1)=10>0 \\ g(2)\approx -3,07<0 \end{array}\right\}\Longrightarrow \alpha\in[1\ ;\ 2]$ $\left.\begin{array}{l} g(1,7)\approx 0,51>0 \\ g(1,8)\approx -0,71<0 \end{array}\right\}\Longrightarrow \alpha\in[1,7\ ;\ 1,8]$

   $\left.\begin{array}{l} g(1,74)\approx 0,02>0 \\ g(1,75)\approx -0,10<0 \end{array}\right\}\Longrightarrow \alpha\in[1,74\ ;\ 1,75]$

c. On peut donc déduire que $g(x) > 0$ sur $[1\,;\,\alpha[$, $g(\alpha) = 0$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha\,;\,45]$.

3. On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[1\,;\,45]$ par $G(x) = -11,25x^2 + 2,5x^2\ln(x) + 30x$.

$$G'(x) = -11,25 \times 2x + \left(2,5 \times 2x \times \ln(x) + 2,5x^2 \times \frac{1}{x}\right) + 30 = -22,5x + 5x\ln(x) + 2,5x + 30$$
$$= -20x + 5x\ln(x) + 30 = g(x)$$

Donc G est une primitive de g sur $[1\,;\,45]$.

4. **a.** $\displaystyle\int_{10}^{45} g(x)\,\mathrm{d}x = G(45) - G(10) \approx -1\,910,7$

b. La valeur moyenne de g sur l'intervalle $[10\,;45]$ est : $\displaystyle\frac{1}{45-10}\int_{10}^{45} g(x)\,\mathrm{d}x \approx -55$.

Partie B

Un ballon sonde, lâché à une altitude de 1 km, relève en continu la température atmosphérique jusqu'à 45 km d'altitude. On admet que la fonction g définie dans la partie A modélise la température de l'air, exprimée en degrés Celsius, en fonction de l'altitude x du ballon sonde, exprimée en km.

1. L'altitude à partir de laquelle la température devient inférieure à 0 degré Celsius est la valeur de x pour laquelle $g(x)$ devient négatif donc à partir de $x = \alpha$ soit à peu près 1,74 km.

2. La température minimale relevée par la sonde est le minimum de la fonction g sur $[1\,;\,45]$ soit approximativement $-70,4$ degrés Celsius.

3. On appelle stratosphère la couche atmosphérique se situant entre 10 km et 45 km d'altitude.
La température moyenne de la stratosphère est la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[10\,;45]$, c'est donc, d'après la question **A.3.**, -55 degrés Celsius.

EXERCICE **Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L** **5 points**

Le gérant d'un hôtel situé dans la ville de Lyon étudie la fréquentation de son établissement afin de prévoir au mieux son budget pour les années futures.
Le 5 décembre 1998, le site historique de Lyon a été inscrit au patrimoine mondial de l'UNESCO et l'hôtel a vu son nombre de clients augmenter significativement comme l'indique le tableau ci-dessous :

Année	1997	1998	1999	2000
Nombre de clients	950	1 105	2 103	2 470

1. Entre 1997 et 2000, le nombre de clients est passé de 950 à 2 470 ce qui fait une augmentation de $2\,470 - 950 = 1\,520$. $\dfrac{1\,520}{950} \times 100 = 160$ donc
le pourcentage d'augmentation du nombre de clients entre 1997 et 2000 est de 160 %.

Par ailleurs, depuis le 1er janvier 2000, une étude statistique a permis de mettre en évidence que, chaque année, l'hôtel compte 1 200 nouveaux clients et que 70 % des clients de l'année précédente reviennent.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre total de clients de l'hôtel durant l'année $2000 + n$. On a ainsi $u_0 = 2\,470$ et, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0,7u_n + 1\,200$.

2. Le nombre total de clients durant l'année 2001 est $u_1 = 0,7u_0 + 1\,200 = 0,7 \times 2\,470 + 1\,200 = 2\,929$.

3. Le gérant de l'hôtel souhaite déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de clients annuel dépassera 3 900. On veut un algorithme qui donne l'année correspondante.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
U prend la valeur 2 470 N prend la valeur 0 Tant que $U < 3900$ U prend la valeur $0,7 \times U + 1200$ N prend la valeur $N+1$ Fin tant que Afficher 2000 + N	U prend la valeur 2 470 N prend la valeur 0 Tant que $U > 3900$ U prend la valeur $0,7 \times U + 1200$ N prend la valeur $N+1$ Fin tant que Afficher 2000 + N	U prend la valeur 2 470 N prend la valeur 0 Tant que $U < 3900$ U prend la valeur $0,7 \times U + 1200$ N prend la valeur $N+1$ Fin tant que Afficher U

- À la sortie de l'algorithme 3, on affiche U, c'est-à-dire le nombre de clients. Comme on veut un algorithme qui donne une année, l'algorithme 3 est à rejeter.
- Dans l'algorithme 2, la condition est « Tant que $U > 3900$ » ; en initialisation on a donné à U la valeur 2 470 donc on n'entre jamais dans la boucle « Tant que ». L'algorithme 2 est à rejeter.

L'algorithme qui convient est l'algorithme 1.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 4000$; donc $u_n = v_n + 4000$.

a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 4000 = 0,7u_n + 1200 - 4000 = 0,7(v_n + 4000) - 2800 = 0,7v_n + 2800 - 2800 = 0,7v_n$

$v_0 = u_0 - 4000 = 2470 - 4000 = -1530$

Donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = -1530$ et de raison $q = 0,7$.

b. (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = -1530$ et de raison $q = 0,7$ donc,

pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = -1530 \times 0,7^n$.

c. On a vu que, pour tout n, $v_n = -1530 \times 0,7^n$ et $u_n = v_n + 4000$ donc,

pour tout n, $u_n = 4000 - 1530 \times 0,7^n$.

d. Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de clients a dépassé 3 900 revient à déterminer le nombre n tel que $u_n > 3900$; on résout cette inéquation :

$$\begin{aligned}
u_n > 3900 &\iff 4000 - 1530 \times 0,7^n > 3900 \\
&\iff 100 > 1530 \times 0,7^n \\
&\iff \frac{100}{1530} > 0,7^n \\
&\iff \ln\left(\frac{100}{1530}\right) > \ln\left(0,7^n\right) && \text{croissance de la fonction ln sur }]0\,;\,+\infty[\\
&\iff \ln\left(\frac{100}{1530}\right) > n \times \ln(0,7) && \text{propriété de la fonction ln} \\
&\iff \frac{\ln\left(\frac{100}{1530}\right)}{\ln(0,7)} < n && \text{car } \ln(0,7) < 0
\end{aligned}$$

$\dfrac{\ln\left(\frac{100}{1530}\right)}{\ln(0,7)} \approx 7,6$ donc $n = 8$.

La première année à partir de laquelle le nombre de clients a dépassé 3 900 est $2000 + 8 = 2008$.

5. On veut déterminer le nombre de clients que le gérant de l'hôtel peut espérer avoir chaque année à long terme ; on cherche donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

(v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 ; or $0 < 0,7 < 1$ donc la suite (v_n) a pour limite 0.

Pour tout n, $u_n = 4000 - v_n$ donc la suite (u_n) a pour limite 4 000.

À long terme, le gérant de l'hôtel peut espérer avoir 4 000 clients.

EXERCICE Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Partie A

Un groupe de touristes a réservé toutes les chambres d'un hôtel-restaurant à Venise qui propose tous les soirs à ses pensionnaires le choix entre un menu gastronomique et un menu traditionnel.
On considère, pour la modélisation, que chaque soir les clients choisissent un des deux menus et que le restaurant est réservé aux clients de l'hôtel.
Une étude sur les habitudes des clients montre que, si un soir donné, un client choisit le menu gastronomique, il choisit également le menu gastronomique le soir suivant dans 60 % des cas.
Si le client choisit le menu traditionnel un soir donné, il choisit également le menu traditionnel le soir suivant dans 70 % des cas.

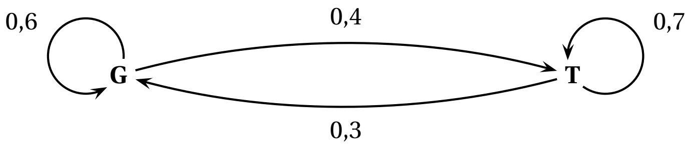
Afin de mieux prévoir ses commandes pour la saison estivale, le gérant souhaite connaître la proportion de clients choisissant le menu gastronomique ou le menu traditionnel à partir du 1$^{\text{er}}$ juin 2015. Ce soir-là, 55 % des clients ont choisi le menu gastronomique.

On note g_0 la probabilité qu'un client ait choisi le menu gastronomique le soir du 1$^{\text{er}}$ juin 2015; on a donc $g_0 = 0,55$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note g_n la probabilité qu'un client choisi au hasard prenne le menu gastronomique le n-ième soir après le 1$^{\text{er}}$ juin 2015.
Ainsi, g_1 est la probabilité qu'un client ait choisi le menu gastronomique le soir du 2 juin 2015.
De la même façon, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note t_n la probabilité qu'un client, choisi au hasard, prenne le menu traditionnel le n-ième soir après le 1$^{\text{er}}$ juin 2015.

On note P_n la matrice $\begin{pmatrix} g_n & t_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste au n-ième soir.

On note G l'état « le client choisit le menu gastronomique » et T l'état « le client choisit le menu traditionnel ».

1. L'énoncé se traduit par le graphe probabiliste suivant :



Dans la suite de l'exercice, on admet que la matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, est $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

2. a. Le 1$^{\text{er}}$ juin 1988, 55 % des clients ont choisi le menu gastronomique; l'état initial est traduit par la matrice $P_0 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \end{pmatrix}$.

b. De $P_1 = P_0 \times M$, $P_2 = P_1 \times M$ et $P_3 = P_2 \times M$, on déduit $P_3 = P_0 \times M^3$.
On obtient $P_3 \approx \begin{pmatrix} 0,431\,90 & 0,568\,2 \end{pmatrix}$.
La probabilité que le 4 juin 2015 un client choisisse le menu gastronomique est environ 0,43 au centième près.

3. a. On sait que l'état stable $P = \begin{pmatrix} g & t \end{pmatrix}$ vérifie l'équation : $P = P \times M$.

On a donc le système : $\left\{\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} g & t \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} g & t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \\ g+t & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} g & = & 0,6g + 0,3t \\ t & = & 0,4g + 0,7t \\ g+t & = & 1 \end{array}\right.$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 0,4g & = & 0,3t \\ 0,3t & = & 0,4g \\ g & = & 1-t \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 0,4(1-t) & = & 0,3t \\ g & = & 1-t \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 0,4 & = & 0,7t \\ g & = & 1-t \end{array}\right.$$

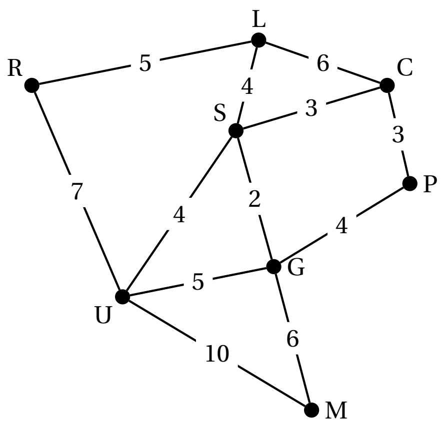
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{4}{7} & = & t \\ 0,3t & = & 0,4g \\ g & = & 1-\dfrac{4}{7} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{4}{7} & = & t \\ g & = & \dfrac{3}{7} \end{array}\right.$$

On a donc $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

b. Le résultat précédent signifie qu'au bout d'un certain nombre de jours la probabilité qu'un client choisisse le menu gastronomique est $\dfrac{3}{7}$.

Partie B

L'hôtel propose également à ses clients des balades en gondole sur les canaux de Venise.
Le graphe ci-dessous représente les principaux canaux de Venise empruntés par le gondolier.
Chaque arête représente un canal et chaque sommet un lieu de la ville.
Le poids de chaque arête représente la durée de parcours, exprimée en minutes, entre deux lieux de la ville en empruntant les canaux.



C : Ca'Pesaro
G : Palazzo Grimani di San Luca
L : Palazzo Labia
M : Piazza San Marco
P : Ponte Di Rialto
R : Piazzale Roma
S : Campo Di San Polo
U : Universita Ca'Foscari

Le gondolier employé par l'hôtel inspecte régulièrement les canaux pour en vérifier la navigabilité.
Il souhaite optimiser son trajet en inspectant une fois et une seule chaque canal.

1. On établit le degré de chaque sommet :

sommet	C	G	L	M	P	R	S	U
degré	3	4	3	2	2	2	4	4

Il y a donc uniquement 2 sommets de degré impair : il existe donc une chaîne eulérienne, c'est-à-dire que l'on peut inspecter tous les canaux en passant une seule fois dans chacun d'eux.
On peut partir soit de Ca'Pesaro soit de Palazzo Labia comme points de départ et d'arrivée.
Par exemple : L–R–U–S–G–U–M–G–P–C–S–L–C.

2. La durée de ce parcours est égale à la somme de tous les temps du graphe soit :
$5 + 7 + 4 + 2 + 5 + 10 + 6 + 4 + 3 + 3 + 4 + 6 = 59$ (min).

EXERCICE 4 **Commun à tous les candidats** **5 points**

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

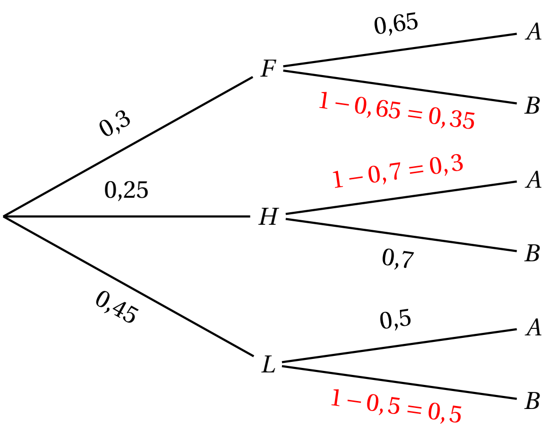
L'entreprise Éclairage vend des ampoules à deux magasins de bricolage : Atelier et Bricolo. Cette entreprise propose trois types d'ampoules : les ampoules fluocompactes qui représentent 30 % du stock, les ampoules halogènes qui représentent 25 % du stock et les ampoules à LED qui représentent 45 % du stock.
On sait que :

- 65 % des ampoules fluocompactes sont achetées par le magasin Atelier ;
- 70 % des ampoules halogènes sont achetées par le magasin Bricolo ;
- 50 % des ampoules à LED sont achetées par le magasin Atelier.

On prélève au hasard une ampoule provenant du stock de l'entreprise Éclairage.
On considère les évènements suivants :

F : « l'ampoule est une ampoule fluocompacte » ;
H : « l'ampoule est une ampoule halogène » ;
L : « l'ampoule est une ampoule à LED » ;
A : « l'ampoule est achetée par le magasin Atelier » ;
B : « l'ampoule est achetée par le magasin Bricolo ».

1. On complète l'arbre pondéré avec les données du texte :



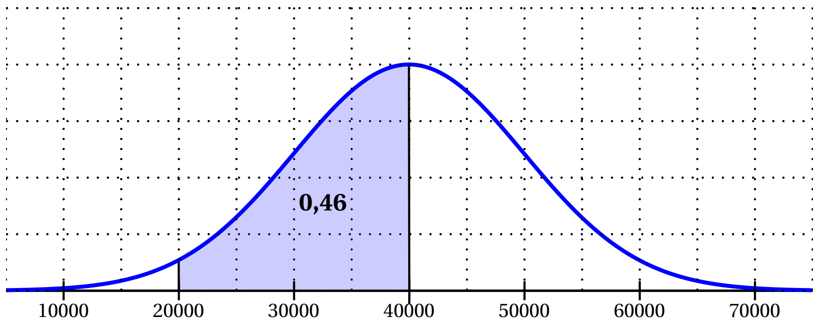
2. $F \cap A$ représente l'événement « l'ampoule est fluocompacte et est achetée par le magasin Atelier ».
$p(F \cap A) = p(F) \times p_F(A) = 0,3 \times 0,65 = 0,195$.

3. La probabilité qu'une ampoule soit achetée par le magasin Bricolo est $p(B)$.
$\{F\,;\,H\,;\,L\}$ forme une partition de l'ensemble des ampoules, donc, d'après la formule des probabilités totales :
$p(B) = p(F \cap B) + p(H \cap B) + p(L \cap B) = 0,3 \times 0,35 + 0,25 \times 0,7 + 0,45 \times 0,5 = 0,105 + 0,175 + 0,225 = 0,505$

Partie B

Une norme de qualité stipule qu'une marque peut commercialiser ses ampoules si leur durée de vie est supérieure à 20 000 heures avec une probabilité d'au moins 0,95.

1. On note X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie, en heures, d'une ampoule de la marque ÉclaireBien. On admet que X suit la loi normale dont la fonction de densité est tracée ci-après.
L'aire grisée comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 0,46.



a. La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 40000$ donc l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $\mu = 40000$.

b. Par symétrie, $p(20000 < X < 40000) = p(40000 < X < 60000)$.
Donc $p(20000 < X < 60000) = 2 \times p(20000 < X < 40000) = 2 \times 0,46 = 0,92$.

c. Pour des raisons de symétrie, $p(X \leqslant 20000) = p(X \geqslant 60000)$.
De plus, $p(X \leqslant 20000) + p(20000 < X < 60000) + p(X \geqslant 60000) = 1$.
On sait que $p(20000 < X < 60000) = 0,92$ donc $p(X \leqslant 20000) = p(X \geqslant 60000) = \dfrac{1-0,92}{2} = 0,04$.
On en déduit que $p(X > 20000) = p(20000 < X < 60000) + p(X \geqslant 60000) = 0,92 + 0,04 = 0,96$.
La probabilité est supérieure à 0,95 donc la marque ÉclaireBien pourra commercialiser ses ampoules.

2. On note Y la variable aléatoire correspondant à la durée de vie, en heures, d'une ampoule de la marque BelleLampe. On admet que Y suit la loi normale d'espérance 42 000 et d'écart-type 15 000.

a. On trouve à la calculatrice $p(Y > 20000) \approx 0,93$ donc la marque BelleLampe ne pourra pas commercialiser ses ampoules.

b. On trouve à la calculatrice que l'arrondi à l'unité du réel a tel que $p(Y < a) = 0,05$ est 17327.
Donc la probabilité que la durée de vie d'une lampe de la marque BelleLampe soit inférieure à 17 327 heures est égale à 0,05.