∽ Corrigé du baccalauréat ES Amérique du Nord ∾
2 juin 2017

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - x$. On note f' sa fonction dérivée. On a alors :

   a. $f'(x) = 0$ **b.** $\boxed{f'(x) = \ln(x)}$ **c.** $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ **d.** $f'(x) = \dfrac{1}{x} - x$

   Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

2. Les entiers naturels n vérifiant l'inéquation $6 \times 0{,}95^n - 1 \leqslant 2$ appartiennent à l'intervalle :

   a. $\left]-\infty\,;\,\dfrac{\ln 3}{\ln(5{,}7)}\right]$ **b.** $\left]-\infty\,;\,\ln\left(\frac{0{,}5}{0{,}95}\right)\right]$ **c.** $\left]-\infty\,;\,\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)}\right]$ **d.** $\boxed{\left[\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)}\,;\,+\infty\right[}$

   $6 \times 0{,}95^n - 1 \leqslant 2 \iff 6 \times 0{,}95^n \leqslant 3 \iff 0{,}95^n \leqslant \dfrac{3}{6} \iff 0{,}95^n \leqslant 0{,}5$

   $\iff \ln(0{,}95^n) \leqslant \ln(0{,}5) \iff n \times \ln(0{,}95) \leqslant \ln(0{,}5) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)}$ car $\ln(0{,}95) < 0$.

3. Une entreprise fabrique des tubes métalliques de longueur 2 m.

   Un tube métallique est considéré comme étant dans la norme si sa longueur est comprise entre 1,98 m et 2,02 m. On prélève au hasard un échantillon de 1 000 tubes, on observe que 954 tubes sont dans la norme.

   L'intervalle de confiance de la proportion des tubes dans la norme pour cette entreprise au niveau de confiance de 95 %, avec les bornes arrondies à 10^{-3}, est :

   a. $\boxed{[0{,}922\,;\,0{,}986]}$ **b.** $[0{,}947\,;\,0{,}961]$ **c.** $[1{,}98\,;\,2{,}02]$ **d.** $[0{,}953\,;\,0{,}955]$

   On détermine un intervalle de confiance au seuil de 95 % : $I_n = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$

   On a $f = \dfrac{954}{1000} = 0{,}954$.

   Les trois conditions sont réalisées : $n = 1\,000 \geqslant 30$, $n \times f = 954 \geqslant 5$ et $n \times (1 - f) = 46 \geqslant 5$.

   Donc : $I_{1000} = \left[0{,}954 - \dfrac{1}{\sqrt{1\,000}}\,;\,0{,}954 + \dfrac{1}{\sqrt{1\,000}}\right] \approx [0{,}922\,;\,0{,}986]$.

4. Pour un archer, la probabilité d'atteindre la cible est de 0,8. Les tirs sont supposés indépendants.

   Quelle est la probabilité qu'il touche 3 fois la cible sur une série de 6 tirs ?

   a. 0,512 **b.** 2,4 **c.** 0,262 144 **d.** $\boxed{0{,}081\,92}$

   À chaque tir il y a deux issues : il touche la cible, avec une probabilité de 0,8, ou il ne la touche pas. L'expérience est répétée 6 fois et les tirs sont indépendants.

   On appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de fois où l'archer touche la cible.

   La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0{,}8$.

   On veut détermine $P(X = 3)$: $P(X = 3) = \dbinom{6}{3} \times 0{,}8^3 \times (1 - 0{,}8)^{6-3} = 0{,}081\,92$

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** En juin 2017, on peut estimer qu'il y aura $27500 - 150 = 27350$ étudiants dans cette université.

   b. À la rentrée de septembre 2017, il y aura à la suite de l'augmentation de 4 % :

   $1{,}04 \times 27350 = 28444$ étudiants.

2. Soit u_n le nombre d'étudiants en septembre de l'année 2016 + n. En juin de l'année suivante (année $(n+1)$), 150 étudiants auront démissionné, pour un reste de $u_n - 150$. Puis à la rentrée de septembre de l'année $(n+1)$, le nombre d'étudiants aura subi une augmentation de 4 %, soit $1{,}04 \times (u_n - 150) = 1{,}04 \times u_n - 156$.

   Donc en septembre de l'année $(n+1)$ il y aura $1{,}04u_n - 156$ étudiants, soit pour tout entier naturel n,

   $$u_{n+1} = 1{,}04u_n - 156.$$

3. On complète les lignes L5, L6, L7 et L9 de l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3	Traitement :	n prend la valeur 0
L4		U prend la valeur 27 500
L5		Tant que $U \leqslant 33000$ faire
L6		n prend la valeur $n+1$
L7		U prend la valeur $1{,}04 \times U - 156$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher $2016 + n$

4. **a.** On fait fonctionner cet algorithme pas à pas :

	Initialisation	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de U	27 500	28 444	29 426	30 447	31 509	32 613	33 762

   b. La valeur affichée en sortie de cet algorithme est : $n = 6$.

5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.

   Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3900$.

   a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3900 = 1{,}04 \times u_n - 156 - 3900 = 1{,}04 \times u_n - 4056 = 1{,}04\,(u_n - 3900)$

   $v_{n+1} = 1{,}04v_n$.

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison 1,04 et de premier terme

   $v_0 = 27500 - 3900 = 23600$.

   b. Donc pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 23600 \times 1{,}04^n$.

   De plus, On a $u_n = v_n + 3900$ donc $u_n = 3900 + 23600 \times 1{,}04^n$.

   c. La suite (v_n) est une suite géométrique de $q = 1{,}04$. $q > 1$ donc la limite de la suite (v_n) quand n tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$. Donc la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$ est aussi égale à $+\infty$.

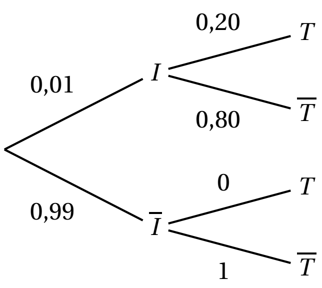
   Le nombre d'étudiants de cette université ne se stabilisera jamais, et continuera à augmenter à l'infini dépassant toute limite de capacité que l'on souhaiterait imposer.

Exercice 3 **5 points**

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

PARTIE A

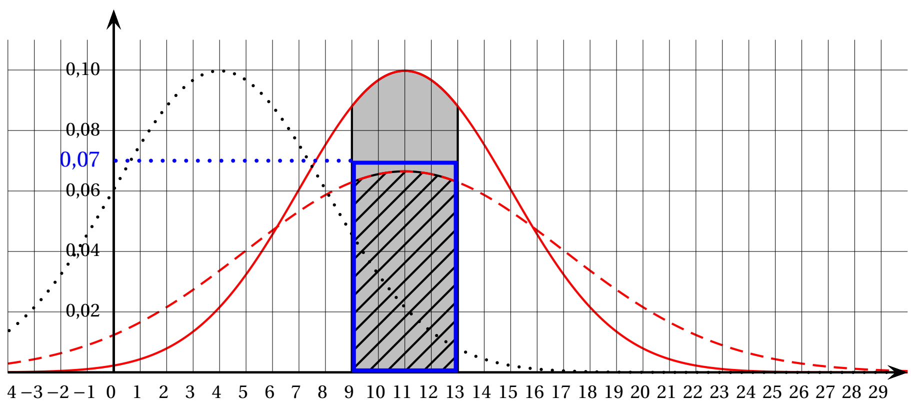
1. On complète l'arbre de probabilités proposé dans le texte :



2. Formule de Bayes : $p\left(I \cap \overline{T}\right) = p_I\left(\overline{T}\right) \times p(I) = 0{,}01 \times 0{,}80 = 0{,}008$
3. Formule de probabilités totales :
$p(T) = p(T \cap I) + p\left(T \cap \overline{I}\right) = p_I(T) \times p(I) + p_{\overline{I}}(T) \times p\left(\overline{I}\right) = 0{,}01 \times 0{,}20 + 0{,}99 \times 0 = 0{,}002.$

PARTIE B

1. $p(9 \leqslant X \leqslant 13) \approx 0{,}383$ (à l'aide de la calculatrice).
2. $p(X \leqslant 6) = 0{,}5 - p(6 \leqslant X \leqslant 11) \approx 0{,}106$ (à l'aide de la calculatrice).
3. A l'aide de la touche inverse loi normale de la calculatrice on trouve que $a \approx 15$ pour que $P(X \leqslant a) = 0{,}84$.
Cela signifie donc que 84% des personnes atteintes de la maladie cœliaque ont attendu au plus 15 pour être diagnostiqué après l'apparition des premiers symptômes.
4. On peut éliminer la courbe en pointillés noirs car elle correspond à une moyenne de 4.
Pour différencier les deux autres, on va utiliser le résultat $P(9 \leqslant X \leqslant 13) \approx 0{,}383$. Cette probabilité correspond à l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations $x = 9$ et $x = 13$. Une des surfaces est colorée en gris, l'autre est hachurée.
Celle qui est hachurée a une aire majorée par celle du rectangle tracé.
Le rectangle a pour aire $0{,}07 \times (13 - 9) = 0{,}28$.
L'aire hachurée est majorée par 0,28 donc ne peut pas être égale à 0,383; donc l'aire hachurée ne correspond pas à la bonne courbe.
La bonne courbe est donc celle dessinée en rouge.



Exercice 3 **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Le graphe possède 9 sommets, il est donc d'ordre 9.

   b. La chaîne D – M – H – R – B – V – G – L – J permet de passer par tous les sommets; le graphe est donc connexe.

   c. Les sommets H et G ne sont pas adjacents. Le graphe n'est pas complet.

2. Le graphe possède plus de deux sommets (six sommets) de degré impair donc il ne possède pas de chaîne eulérienne. Sarah ne pourra pas emprunter toutes les routes une et une seule fois.

3. **a.** On complète la matrice M d'adjacence :

$$M = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&1&1&0&0&1\\ 1&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&1&1&0&0 \end{pmatrix}$$

   b. Le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D est $M^4_{(1,2)} = 3$. Il s'agit des chemins : B – R – H – M – D, B – V – L – M – D et B – V – J – M – D.

4. À l'aide de l'algorithme de Dijkstra on obtient le tableau suivant :

B	D	G	H	J	L	M	R	V	Sommets
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	B
×	∞	∞	∞	∞	∞	∞	50 (B)	220 (B)	R (B)
×	∞	150 (R)	272 (R)	∞	∞	∞	×	220 (B)	G (R)
×	∞	×	272 (R)	∞	291 (G)	∞	×	220 (B)	V (B)
×	∞	×	272 (R)	412 (V)	291 (G)	670 (V)	×	×	H (R)
×	∞	×	×	412 (V)	291 (G)	567 (H)	×	×	L (H)
×	∞	×	×	412 (V)	×	567 (H)	×	×	J (V)
×	∞	×	×	×	×	567 (H)	×	×	M (H)
×	617 (M)	×	×	×	×	×	×	×	D (M)

Le plus court chemin permettant d'aller de B à D est le chemin

$$B \xrightarrow{50} R \xrightarrow{222} H \xrightarrow{295} M \xrightarrow{50} D$$

Il faut parcourir 617 km.

Exercice 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0,7\,;\,6]$; on suppose que f est dérivable.

PARTIE A : Étude graphique

1. Le coefficient directeur de la droite (AB) est : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-4}{4-3} = -4$. Donc $f'(3) = -4$.
2. La fonction f est décroissante sur les intervalles $[\,0,7\ ;\ 1]$ et sur $[\,2\ ;\ 6\,]$; elle est croissante sur l'intervalle $[\,1\ ;\ 2\,]$. On peut donc en déduire le signe de f'sur l'intervalle $[\,0,7\ ;\ 6\,]$.

x	0,7		1		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

PARTIE B : Étude théorique

On admet que la fonction f est définie par $f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$.

1. $f'(x) = (2x-2)\times \mathrm{e}^{-2x+6} + \left(x^2-2x+1\right)\times(-2)\mathrm{e}^{-2x+6}) = \left(2x-2-2x^2+4x-2\right)\times \mathrm{e}^{-2x+6}$
   $= \left(-2x^2+6x-4\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$
2. Pour tout $x \in [0,7\ ;\ 6]$, $\mathrm{e}^{-2x+6} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que le trinôme du second degré $-2x^2+6x-4$.
   $\Delta = 6^2 - 4\times(-2)\times(-4) = 4$, donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-6-2}{-4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-6+2}{-4} = 1$.
   En utilisant le signe du trinôme du second degré, on établit le tableau de variations suivant :

x	0,7		1		2		6
$-2x^2+6x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	0	↗	e^2	↘	

3. **a.** La fonction f est concave sur les intervalles dans lesquels $f'' \leqslant 0$.
   La ligne 3 donne la forme factorisée de la dérivée seconde f''. On en déduit que pour tout $x \in [\,0,7\ ;\ 6\,]$, $f''(x)$ a le même signe que le trinôme du second degré $2x^2-8x+7$. La ligne 4 permet de déterminer les solutions de l'équation $f''(x) = 0$, ce qui nous donne les racines du trinôme. En utilisant le signe du trinôme du second degré, on en déduit que $f''(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \in \left[\dfrac{-\sqrt{2}+4}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}+4}{2}\right]$.

   b. Avec les mêmes lignes, on peut aussi en déduire que la dérivée seconde f'' s'annule et change de signe pour les deux valeurs $x_1 = \dfrac{-\sqrt{2}+4}{2}$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{2}+4}{2}$.
   La courbe représentative de la fonction f admet donc deux points d'inflexion d'abscisses x_1 et x_2.

   c. On pose $I = \displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. On utilise la ligne 5 : $I = \displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = F(5) - F(3)$
   $F(5) = \dfrac{1}{4}(-50+10-1)\mathrm{e}^{-4} = -\dfrac{41}{4}e^{-4}$ et $F(3) = \dfrac{1}{4}(-18+6-1)\mathrm{e}^0 = -\dfrac{13}{4}$
   $I = -\dfrac{41}{4}\mathrm{e}^{-4} - \left(-\dfrac{13}{4}\right) = \dfrac{13-41\mathrm{e}^{-4}}{4} \approx 3,1$