Corrigé du baccalauréat terminale ES Antilles-Guyane 16 juin 2017

Exercice I 5 points

Commun à tous les candidats

1. A et B sont deux évènements d'une expérience aléatoire.
   On note $\overline{B}$ l'évènement contraire de B.
   On sait que : $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,42$.
   $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p_B} = \dfrac{0,42}{0,5} = 0,84$: $\boxed{p_B(A) = 0,84}$ (réponse c.)
2. Dans une station de ski, le temps d'attente à un télésiège donné, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;5]$.
   $p(X > 2) = p(2 < X \leqslant 5) = \dfrac{5-2}{5-0} = \dfrac{3}{5}$; $\boxed{p(X > 2) = \dfrac{3}{5}}$
3. Une machine remplit des flacons dont le volume annoncé est de 100 mL. On admet que le volume contenu dans le flacon peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 100 mL et d'écart type 2 mL.
   $p(96 \leqslant Y \leqslant 104) = p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)\boxed{\approx 0,95}$ (réponse c.)
4. Si f représente la fréquence du caractère étudié dans un échantillon de taille n, alors si les condition sont vérifiées, l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %, est donné par :
   $I = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ qui a une amplitude de $A = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.
   On cherche donc un entier n strictement positif tel que $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,1$.
   La fonction inverse étant décroissante sur $]0\,;\,+\infty]$, on en déduit $\dfrac{\sqrt{n}}{2} \geqslant \dfrac{1}{0,1} = 10$ qui donne $\sqrt{n} \geqslant 20$.
   En appliquant la fonction carré croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, on obtient : $\boxed{n \geqslant 20^2 = 400}$. (réponse d.)
5. La fonction f est la fonction densité de probabilité associée à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
   La fonction g est la fonction de densité de probabilité associée à la loi normale de moyenne $\mu = 3$ et d'écart type $\sigma = 2$.
   La fonction f est la fonction de Gauss définie pr $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ donc $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,4$ ce qui exclut la courbe c.
   La courbe représentative de g doit être symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu = 3$; cela exclut la courbe a.
   On sait que $p(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = p(1 \leqslant X \leqslant 5) \approx 0,68$.
   Cela exclut la courbe $\mathcal{C}_g$ de la figure b., car l'aire correspondante entre $x = 1$ et $x = 5$ est visiblement supérieure à quatre carreaux, donc supérieure à 0,8.
   La réponse est donc la **réponse d.**

Exercice II 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

1. $u_0 = 75$
   - $u_1 = (1-4\,\%)\,u_0+2 = 0,96\times 75+2 = 72+2 = 74$: $\boxed{u_1 = 74}$
   - $u_2 = (1-4\,\%)\,u_1+2 = 0,96\times 74+2 = 71,04+2 = 73,04$: $\boxed{u_1 = 73,04}$
2. - $u_1-u_0 = -1$ et $u_2-u_1 = -0,96$; la différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante, donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
   - $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{74}{75}$; $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{73,04}{74} = \dfrac{7304}{7400} = \dfrac{913}{925} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$; le quotient de deux termes consécutifs n'est pas constant donc la suite n'est pas géométrique.
3. Pour tout n, $u_{n+1}\,(1-4\,\%)\,u_n+2 = 0,96u_n+2$ donc $\boxed{u_{n+1} = 0,96u_n+2}$.
4. Pour tout n, on pose $v_n = u_n-50$.
   (a) Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1}-50 = (0,96u_n+2)-50 = 0,96u_n-48 = 0,96\,(u_n-50) = 0,96v_n$.
   On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $\boxed{q = 0,96}$.
   (b) Le premier terme est $v_0 = u_0-50 = 75-50 = 25$.
   On a alors : $v_n = v_0\times q^n = 25\times 0,96^n$: $\boxed{v_n = 25\times 0,96^n}$.
   (c) Pour tout n, $v_n = u_n-50$ donc $u_n = v_n+50$ d'où $\boxed{u_n = 25\times 0,96^n+50}$.
   (d) $-1 < 0,96 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,96^n = 0$; par produit et par somme, on a : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 50}$.
   La quantité d'eau dans la piscine va se stabiliser à 50 m^3.
5. (a) Complétons l'algorithme :

Variables :	n est un nombre entier naturel	L1
	u est un nombre réel	L2
Traitement :	n prend la valeur 0	L3
	u prend la valeur 75	L4
	Tant que $u \geqslant 65$	L5
	u prend la valeur $0,96\times u+2$	L6
	n prend la valeur $n+1$	L7
	Fin Tant que	L8
Sortie :	Afficher n	L9

   (b) À la calculatrice, on trouve $u_{12}\approx 65,32$ et $u_{13}\approx 64,7$ donc l'algorithme affiche $\boxed{n = 13}$.
   (c) Si on conserve ce réglage, le niveau de l'eau est suffisant pendant 12 jours.

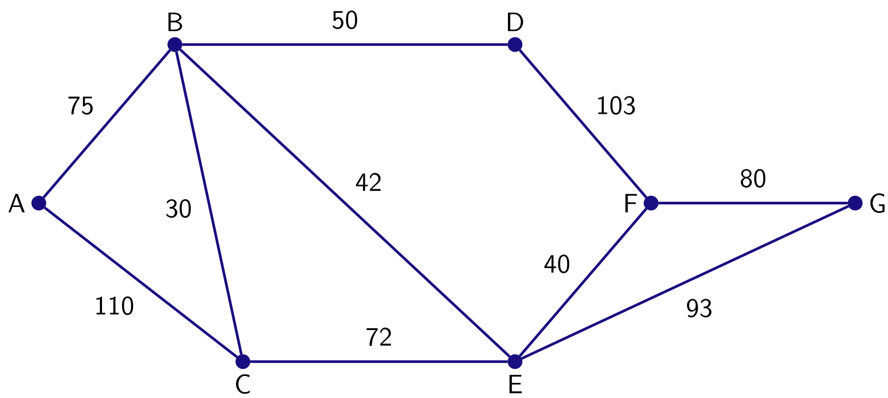
Exercice II 5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Le graphe ci-dessous représente le plan d'un centre de vacances. Les arêtes représentent les allées et les sommets, les carrefours. On a indiqué sur chaque arête la longueur en mètre des allées entre deux carrefours.



1. Déterminons le degré des sommets

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	2	4	3	2	4	3	2

Exactement deux sommets de ce graphe connexe ont un degré impair.

Il existe donc une chaîne eulérienne. On peut donc nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles.

2. Le graphe possède des sommets de degré impair.

Il n'existe donc pas de cycle eulérien.

Il n'existe donc pas de parcours permettant de nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles et de revenir au point de départ.

3. Déterminons le trajet le plus court pour aller du carrefour A au carrefour G.

Pour cela, nous allons utiliser l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	sommet
0							A
	75(A)	110(A)					B
		105(B)	125(B)	117(B)			C
			125(B)	117(B)			E
					157(E)	210(E)	D
					157(E)	210(E)	F
						210(E)	G

Le chemin le plus court est donc A – B – E – G. Il mesure 210 mètres.

Partie B

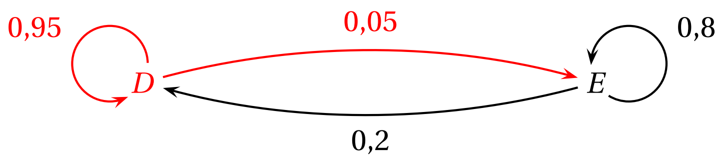
Dans ce centre de vacances, les vacanciers peuvent, chaque jour, déjeuner au restaurant du centre ou à l'extérieur. On constate chaque jour que :

— 5 % des vacanciers ayant déjeuné au centre de vacances ne se réinscrivent pas pour le lendemain ;

— 20 % des vacanciers ayant déjeuné à l'extérieur s'inscrivent pour déjeuner au centre de vacances le lendemain.

On note D l'état « Déjeuner au centre de vacances » et E l'évènement « Déjeuner à l'extérieur ».

1. Graphe correspondant à la situation :



2. La matrice de transition de ce graphe, les sommets étant rangés selon l'ordre alphabétique, est :

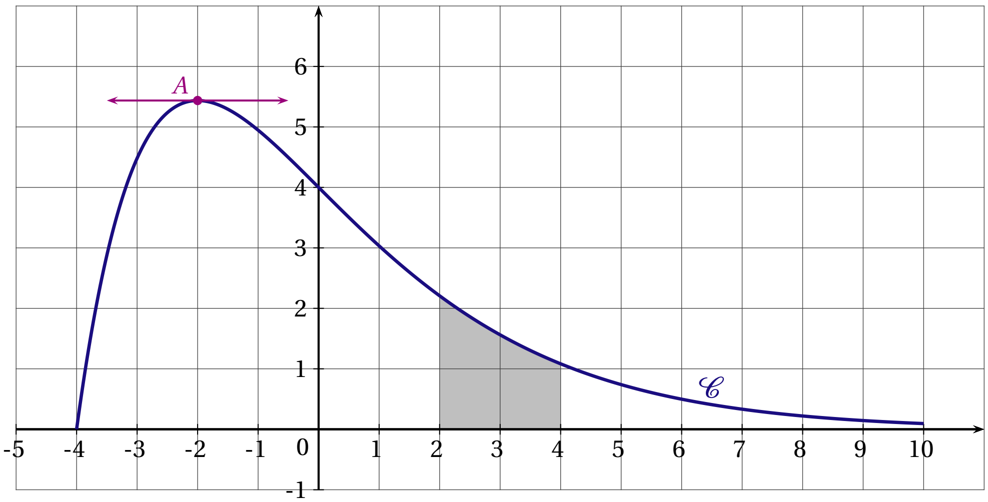
$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}}.$$

3. On note d_n et e_n respectivement la proportion de vacanciers prenant leur déjeuner au centre de vacances et la proportion de vacanciers prenant leur déjeuner à l'extérieur le n-ième jour.
   On note $P_n = \begin{pmatrix} d_n & e_n \end{pmatrix}$.
   On a $P_1 = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$.
   Le deuxième jour, on a $P_2 = p_1 \times M = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} 0,25 \times 0,95 + 0,75 \times 0,2 & 0,25 \times 0,05 + 0,75 \times 0,8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0,3875 & 0,6125 \end{pmatrix})}$.
   Le pourcentage de vacanciers qui mangent au centre le deuxième jour est $d_2 = 0,3875 = 38,75\,\%$.
   De même, $P_5 = P_1 \times M^4 \approx \boxed{\begin{pmatrix} 0,626 & 0,374 \end{pmatrix}}$ (calculé à la calculatrice).
   Le pourcentage de vacanciers qui mangent au centre le cinquième jour est $d_5 \approx 0,626 = 62,6\,\%$.
4. $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} 0,575 & 0,425 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ donc l'état $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ n'est pas stable.
5. Déterminons l'état stable $P = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$. Il vérifie :
   $$\begin{cases} P = P \times M \\ d + e = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 0,95d + 0,2e \\ e = 0,05d + 0,8e \\ e = 1 - d \end{cases} \iff \begin{cases} d = 0,95d + 0,2(1-d) \\ e = 1 - d \end{cases} \iff \begin{cases} 0,25d = 0,2 \\ e = 1 - d \end{cases} \iff$$
   $$\begin{cases} d = 0,8 \\ e = 0,2 \end{cases}.$$
   L'état stable est donc $\boxed{P \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}}$.
   Puisque la matrice M est d'ordre 2 et ne comporte aucun 0, alors la suite (P_n) converge vers la matrice P.
   Sur le long terme, 80 % des vacanciers prendront leur déjeuner au centre.
   L'affirmation est donc fausse.

Exercice III 7 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle [-4; 10]. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses. Le domaine S grisé sur la figure est le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 2$ et la droite d'équation $x = 4$.



Partie A

1. Puisque la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses, on a : $\boxed{f'(-2) = 0}$.
2. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4 est « dirigée vers le bas » donc le nombre dérivée $f'(4)$, coefficient directeur de cette tangente, est négatif.
3. L'aire du domaine S est comprise entre 3 et 4 unités d'aires.

Partie B

La fonction f précédente est définie sur l'intervalle [-4; 10] par $f(x) = (x+4)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

1. (a) La fonction f est dérivable sur [-4; 10].

   La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v+uv'$ avec : $\begin{cases} u(x) = (x+4) \\ v(x) = \mathrm{e}^{-0,5x} \end{cases}$; $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -0,5\mathrm{e}^{-0,5x} \end{cases}$.

   On en déduit : $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-0,5x} + (x+4) \times (-0,5)\mathrm{e}^{-0,5x} = (1 - 0,5x - 2) \times \mathrm{e}^{-0,5x}$ donc

   $$\text{Pour tout } x \in [-4\ ;\ 10],\ \boxed{f'(x) = (-0,5x - 1)\mathrm{e}^{-0,5x}}$$

   (b) Pour tout x, $\mathrm{e}^{-0,5x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-0,5x - 1$ et s'annule si $-0,5x - 1 = 0$.

   $-0,5x - 1 = 0 \iff -0,5x = 1 \iff x = -\dfrac{1}{0,5} = -2$.

   $-0,5x - 1 > 0 \iff -0,5x > 1 \iff x < -2$ (en divisant par $-0,5$, nombre négatif).

   On en déduit que f est décroissante sur $[-4\ ;\ -2]$ puis croissante sur $[-2\ ;\ 10]$.

x	-4		-2		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2\mathrm{e}$	$\searrow$	$14\mathrm{e}^{-5}$

(c) Sur $[1~;~6]$, f est continue, $f(1) = 5\text{e}^{-0,5} \approx 3,03 > 1,5$ et $f(6) = 10\text{e}^{-3} \approx 0,5 < 1,5$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1,5$ admet une solution sur $[1~;~6]$; celle-ci est unique dans cet intervalle, car f est décroissante sur cet intervalle. On la note α.

(d) À la calculatrice, on trouve $\boxed{\alpha \approx 3,11}$.

2. On admet que la dérivée seconde de f est définie par $f''(x) = 0,25x\text{e}^{-0,5x}$.

(a) Étudions la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-4~;~10]$.
f est convexe sur un intervalle $[a~;~b]$ si, et seulement si, $f''(x) \geqslant 0$ sur cet intervalle.
Comme $\text{e}^{0,5x} > 0$, $f''(x) > 0 \iff 0,25x > 0 \iff x > 0$.
f est donc **convexe** sur $[0~;~10]$.

(b) f admet un point d'inflexion d'abscisse 0. Les coordonnées du point d'inflexion sont donc $(0~;~4)$.

3. (a) Soit F la fonction définie par $F(x) = (-2x+12)\text{e}^{-0,5x}$. Pour montrer que F est une primitive de f sur $[-4~;~10]$, il suffit de montrer que $\boxed{F' = f}$.

(b) $S = \displaystyle\int_4^2 f(x)\,\text{d}x = F(4) - F(2) = -20\text{e}^{-2} - (-16)\,\text{e}^{-1} = \boxed{16\text{e}^{-1} - 20\text{e}^{-2}}$.
$\boxed{S \approx 3,18}$

Exercice IV **3 points**

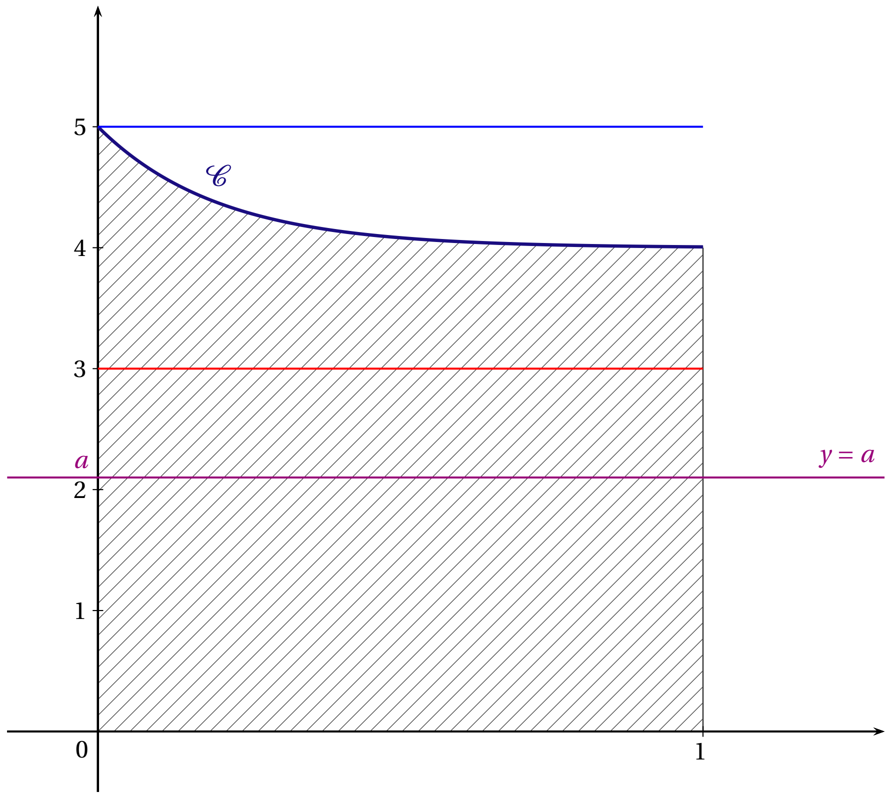
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = 4 + \text{e}^{-5x}$.

On a tracé dans le repère orthogonal ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère du plan.

Le domaine $\mathscr{D}$ hachuré sur la figure est le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

On veut partager le domaine hachuré en deux domaines de même aire par une droite d'équation $y = a$, parallèle à l'axe des abscisses, selon l'exemple donné ci-dessous.



1. Supposons que l'on prenne $a = 3$; l'aire de la partie du plan comprise entre la droite d'équation y=3, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ vaut 3 (aire d'un rectangle).

   L'aire de la partie du plan comprise entre la droite d'équation $y = 3$, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est inférieure à l'aire délimitée par les droites d'équations $y = 3$ et $y = 5$ qui vaut 2 (aire d'un rectangle).

   Les deux aires sont donc différentes ; $a = 3$ ne convient pas.

2. L'aire de la partie du plan comprise entre la droite d'équation $y = a$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ vaut a.

   L'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ vaut donc $2a$.

   Cette aire vaut $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $f(x) = 4 + \mathrm{e}^{-5x}$.

   Une primitive de f est F avec $F(x) = 4x - \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-5x}$ car $\mathrm{e}^{-5x} = -\dfrac{1}{5} \times \left(-5\mathrm{e}^{-5x}\right) = -\dfrac{1}{5} u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ en posant $u(x) = -5x$ dont une primitive est $-\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-5x}$.

   $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = 4 - \dfrac{\mathrm{e}^{-5}}{5} + \dfrac{1}{5} = \boxed{\dfrac{21 - \mathrm{e}^{-5}}{5}}$.

   On en déduit que $\boxed{a = \dfrac{21 - \mathrm{e}^{-5}}{10} \approx 2,1}$ à 0,1 près