Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat Terminale ES Antilles-Guyane 7 septembre 2017

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier l'affirmation choisie.

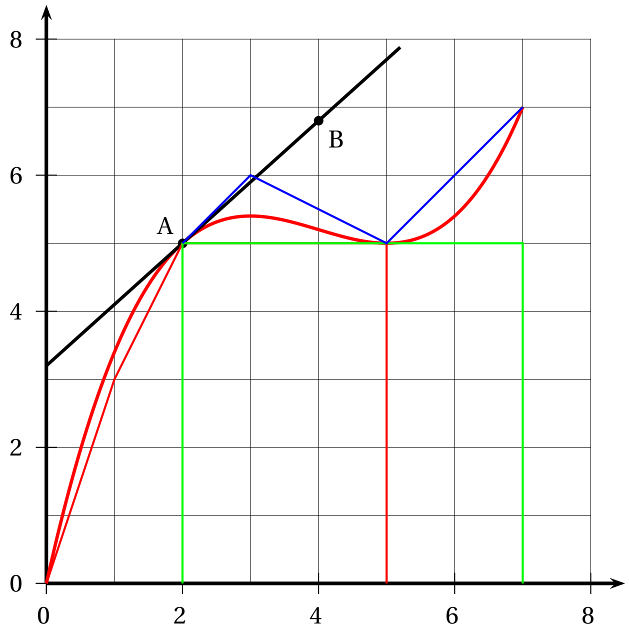
1. **Affirmation 4 :** la probabilité que le candidat A obtienne entre 44,91 % et 51,09 % des votes est d'environ 0,95.

   La fréquence des électeurs de A est égale à $f = \dfrac{504}{1\,050} = 0,48$.

   On a $n = 1\,050 \geqslant 30$, $nf = 1\,050 \times 0,48 = 504 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 1\,050 \times 0,52 = 546 \geqslant 5$.

   On peut dire que l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est :

   $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,48 - \dfrac{1}{\sqrt{1050}}\,;\, f + \dfrac{1}{\sqrt{1050}}\right] \approx [0,449\,139\,;\, 510\,861]$.



2.

   a. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A admet pour équation :

   Affirmation 3 : $y = 0,9x + 3,2$

   En effet le coefficient directeur de cette tangente est celui de la droite (AB) soit $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{6,8-5}{4-2} = \dfrac{1,8}{2} = 0,9$.

   Une équation de la tangente est donc :

   $y - y_A = 0,9\,(x - x_A)$, soit $y - 5 = 0,9(x-2) = 0,9x - 1,8$, soit finalement : $y = 0,9x + 3,2$.

   b. **Affirmation 4 :** $25 \leqslant \displaystyle\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 31$

   En effet l'intégrale sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ vaut d'après le dessin (en rouge) plus de 19,5.

   Sur l'intervalle $[2\,;\,7]$, l'intégrale égale en unité d'aire à l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = 2$ et $x = 7$ est supérieure à 25 (en vert) et inférieure à 28,5 (en bleu).

3. a. En effet S prend les valeurs : 20,5 31,525 43,101 3 donc dépassera 50 pour $N = 4$.
   b. **Affirmation 2 :** l'algorithme 2 affiche en sortie une valeur comprise entre 55 et 56.
   Pour $K = 4$, on obtient $S \approx 55,25$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

1. a. Si 20 % des vélos sont devenus inutilisables une année, il en reste $1 - \dfrac{20}{100} = \dfrac{80}{100} = 0,8$.
   Chaque année on multiplie le nombre de vélos de l'année précédente par 0,8 et on ajoute les 30 vélos rachetés.
   b. On a donc $u_1 = 0,8u_0 + 30 = 200 \times 0,8 + 30 = 160 + 30 = 190$.
   Il y aura le 1er janvier 2018, 190 vélos disponibles.
2. a. On a pour tout naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 150 = 0,8u_n + 30 - 150 = 0,8u_n - 120 = 0,8\left(u_n - \dfrac{120}{0,8}\right) = 0,8(u_n - 150) = v_{n+1} = 0,8v_n$; cette dernière égalité montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8, de premier terme $v_0 = u_0 - 150 = 200 - 150 = 50$.
   b. On sait qu'alors quelque soit le naturel n, $v_n = v_0 \times 0,8^n = 50 \times 0,8^n$.
   c. Pour tout naturel n, $v_n = u_n - 150 \iff u_n = v_n + 50$, soit
   $u_n = 50 \times 0,8^n + 150$.
   d. Il faut donc résoudre l'inéquation : $u_n \leqslant 160$, soit
   $50 \times 0,8^n + 150 \leqslant 160 \iff 50 \times 0,8^n \leqslant 10 \iff$
   $0,8^n \leqslant \dfrac{1}{5} \iff n\ln 0,8 \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{5}\right) \iff n \geqslant \dfrac{\ln\frac{1}{5}}{\ln 0,8}$.
   Or $\dfrac{\ln\frac{1}{5}}{\ln 0,8} \approx 7,2$.
   Le nombre de vélos sera inférieur à 160 en $2015 + 8 = 2023$. La location s'arrêtera.
3. a. La somme des subventions pour les deux premières années est égale à :
   $20 \times (u_0 + u_1) = 20 \times (200 + 190) = 20 \times 390 = 7\,800$ euros.
   b. Calculons grâce à la formule $u_n = 50 \times 0,8^n + 150$, le nombre de vélos disponibles chaque année en arrondissant ce nombre à l'entier le plus proche :

Année	Nombre de vélos	Subvention annuelle
2017	200	4 000
2018	190	3 800
2019	182	3 640
2020	176	3 520
2021	170	3 400
2022	166	3 320
2023	163	3 260
2024	160	3 200
2025	158	3 160
Totaux	1 560	31 300

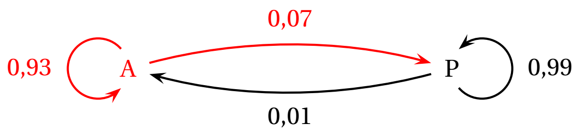
   Le total des subventions de la région sera de 31 300 euros.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. On représente cette situation par un graphe probabiliste :



2. D'après le texte on a : $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,93\,a_n + 0,01\,p_n \\ b_{n+1} & = & 0,07\,a_n + 0,99\,b_n \end{array}\right.$

ce qui s'écrit sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,93 & 0,07 \\ 0,01 & 0,99\end{pmatrix}$

La matrice de transition de ce graphe est donc $T = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,07 \\ 0,01 & 0,99\end{pmatrix}$

3. $R_1 = R_0 \times T = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,95\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,93 & 0,07 \\ 0,01 & 0,99\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,05\times 0,93 + 0,95\times 0,01 & 0,05\times 0,07+0,95\times 0,99\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0,056 & 0,944\end{pmatrix}$

4. $2021 = 2017+4$ donc l'état probabiliste en 2021 est R_4 ; on calcule successivement R_2, R_3 et R_4 à la calculatrice en arrondissant au millième :

Année	2017	2018	2019	2020	2021
n	0	1	2	3	4
R_n	$\begin{pmatrix} 0,05 & 0,95\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,056 & 0,944\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,062 & 0,938\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,067 & 0,933\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,071 & 0,929\end{pmatrix}$

Donc l'état probabiliste en 2021 est $\begin{pmatrix} 0,071 & 0,929\end{pmatrix}$.

5. On admet qu'il existe un état stable $\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}$.

a. D'après le texte, on a pour tout n, $a_n + p_n = 1$; donc l'état stable $\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}$ vérifie $x+y=1$.
De plus l'état stable vérifie

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}\times T &\iff \begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0,93 & 0,07 \\ 0,01 & 0,99\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93x+0,01y & 0,07x+0,99y\end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0,93\,x+0,01\,y \\ y & = & 0,07\,x+0,99\,x\end{array}\right. \iff -0,07x+0,01y=0\\
&\iff -7x+y=0
\end{aligned}$$

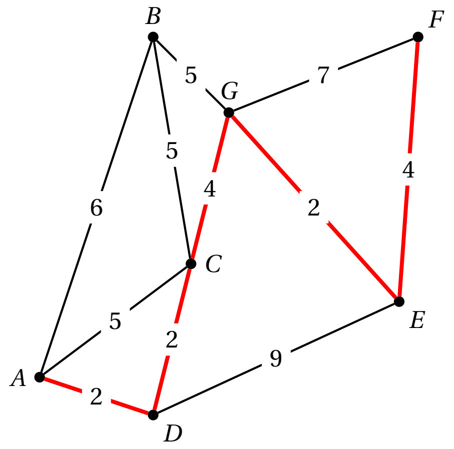
Donc x et y sont solutions du système $\left\{\begin{array}{rcl} -7x+y & = & 0 \\ x+y & = & 1\end{array}\right.$.

b. $\left\{\begin{array}{rcl} -7x+y & = & 0 \\ x+y & = & 1\end{array}\right. \; L_1 \leftarrow L_2 - L_1 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 8x & = & 1 \\ y & = & 1-x\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0,125 \\ y & = & 0,875\end{array}\right.$

L'état stable du système est $\begin{array}{rcl} x & = & 0,125 \\ y & = & 0,875\end{array}$.

Partie B

Le responsable du service de location souhaite vérifier l'état des pistes cyclables reliant les parkings à vélos de location disposés dans la ville. On modélise la disposition des lieux par le graphe étiqueté ci-contre dont les sommets représentent les parkings à vélo. Les poids des arêtes sont les durées moyennes de parcours, en minute, pour se rendre d'un parking à l'autre en suivant la piste cyclable.



1. Cherchons les degrés de chacun des sommets du graphe :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	3	3	4	3	3	2	4

Il y a plus de deux sommets de degrés impairs donc, d'après le théorème d'Euler, il ne peut pas y avoir de parcours partant de A pour arriver en F en passant une seule fois par chaque piste cyclable.

2. Le parcours le plus rapide possible permettant d'aller de A à F est obtenu par l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	J	G	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	6 A	5 A	2 A	∞	∞	∞	D
	6 A	~~5 A~~ 4 D		11 D	∞	∞	C
	6 A ~~9 C~~			11 D	∞	8 C	B
				11 D	∞	8 C ~~11 B~~	G
				~~11 D~~ 10 G	15 G		E
					~~15 G~~ 14 E		F

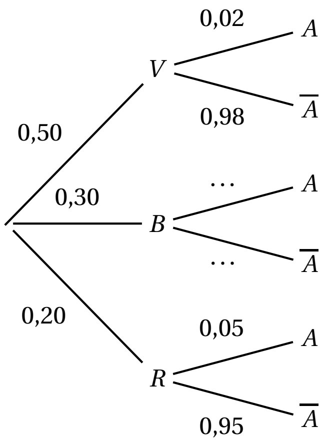
Le parcours le plus rapide pour aller de A à F est : $A \xrightarrow{2} D \xrightarrow{2} C \xrightarrow{4} G \xrightarrow{2} E \xrightarrow{4} F$
Il dure 14 minutes.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1.



2. $p(V \cap A) = p(V) \times p_V(A) = 0,50 \times 0,02 = 0,01$.
Il y a 1 % de chance de choisir un coureur du parcours vert ayant abandonné.

3. Il faut calculer $p_A(V) = \dfrac{p(A \cap V)}{p(A)} = \dfrac{0,01}{0,032} = 0,312\,5$.

4. D'après la loi des probabilités totales, on a :
$p(A) = p(A \cap V) + p(A \cap B) + p(A \cap R)$. (1)
Or $p(A \cap R) = p(R) \times p_R(A) = 0,2 \times 0,05 = 0,01$.
(1) devient $0,032 = 0,01 + p(A \cap B) + 0,01$ soit $p(A \cap B) = 0,032 - 0,01 - 0,01 = 0,012$.

5. On sait que $p(B \cap A) = p(B) \times p_B(A)$ soit $0,012 = 0,3 \times p_B(A)$, soit $p_B(A) = \dfrac{0,012}{0,3} = 0,04$.
Donc parmi les coureurs du parcours bleu, il y a 4 % d'abandons.

Partie B

1. Le premier graphique ne peut représenter la fonction de densité : d'après celui-ci on aurait $p(\sigma - 2\mu \leqslant X \leqslant \sigma + 2\mu) = 1$ ce qui n'est pas possible.

2. **a.** On sait que $p(\sigma - \mu \leqslant X \leqslant \sigma + \mu) = p(5 \leqslant X \leqslant 7) \approx 0,95$.

b. On sait que $p(X \leqslant 4) = p(X \leqslant 6) - p(4 \leqslant X \leqslant 6) = 0,5 - p(4 \leqslant X \leqslant 6) \approx 0,159$. (calculatrice)

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

$$f(x) = 10 - \frac{\mathrm{e}^{0,2x+1}}{x}.$$

1. Sur l'intervalle $[1\,;\,25]$, la fonction f est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x) = 0 - \dfrac{0,2x\mathrm{e}^{0,2x+1} - \mathrm{e}^{0,2x+1}}{x^2} = \mathrm{e}^{0,2x+1}\dfrac{1 - 0,2x}{x^2}$.

2. Quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{0,2x+1} > 0$ et $x^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 0,2x$.

- $1 - 0,2x > 0 \iff 1 > 0,2x \iff 5 > x \iff x < 5$; donc sur $[1\,;\,5[$, $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante sur $[1\,;\,5[$;
- $1 - 0,2x < 0 \iff 1 < 0,2x \iff 5 < x \iff x > 5$; donc sur $]5\,;\,25]$, $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante sur $]5\,;\,25]$;
- $1 - 0,2x = 0 \iff x = 5$; $f'(5) = 0$; $f(5)$ est donc le maximum de f sur $[1\,;\,25]$.

$f(5) = 10 - \dfrac{\mathrm{e}^{1+1}}{5} = 10 - \dfrac{\mathrm{e}^2}{5} \approx 8,522.$

$f(1) = 10 - \dfrac{\mathrm{e}^{0,2+1}}{1} = 10 - \mathrm{e}^{1,2} \approx 6,68$ et $f(25) = 10 - \dfrac{\mathrm{e}^{0,2\times 25+1}}{25} = 10 - \dfrac{\mathrm{e}^6}{25} \approx -6,137.$

D'où le tableau de variations :

x	1	5	25
$f'(x)$			
$f(x)$	$\approx 6,68$ $\nearrow$	$\approx 8,522$	$\searrow$ $\approx -6,137$

3. On s'intéresse à l'équation $f(x) = 0$.

a. Le tableau de variations montre que sur l'intervalle $[1\,;\,5]$, $f(x) > 0$: l'équation n'a pas de solution sur cet intervalle.

b. Sur l'intervalle $[5\,;\,25]$, la fonction f est continue, car dérivable, $f(5) > 0$ et $f(25) < 0$, donc d'après la propriété des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in [5\,;\,25]$, tel que $f(\alpha) = 0$.

c. La calculatrice donne successivement :

$f(21) \approx 1,368$ et $f(22) \approx -0,064$, donc $21 < \alpha < 22$;

$f(21,9) \approx 0,09$ et $f(22) \approx -0,064$, donc $21,9 < \alpha < 22,0$;

$f(21,95) \approx 0,014$ et $f(21,96) \approx -0,002$, donc $21,95 < \alpha < 21,96$.

d. Le logiciel de calcul formel donne :

$f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2x+1}\left(-x^2 + 10x - 50\right)}{25x^3}$.

Sur l'intervalle $[1\,;\,25]$, on a $x^3 > 0$ et $\mathrm{e}^{0,2x+1} > 0$: le signe de $f''(x)$ est donc celui du trinôme $-x^2 + 10x - 50$.

Pour celui-ci $\Delta = 100 - 4 \times (-1) \times (-50) = -100 > 0$: le trinôme n'a pas de racines, il a donc le signe de $a = -1$; le trinôme et par conséquent la dérivée seconde est négative sur l'intervalle $[1\,;\,25]$: la fonction f est donc concave sur cet intervalle.

Partie B

1. D'après la partie A, on a vu que f a pour maximum $f(5) \approx 8,522 \approx 8\,522$ euros.
Ce maximum est obtenu pour $x = 5$, soit 50 tonnes produites.

2. On a vu dans la partie A que f est positive sur l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$ et que $\alpha \approx 21,95$. La société peut donc fabriquer au maximum 219 tonnes (à une tonne près) d'aliments pour réaliser un bénéfice.