Corrigé du baccalauréat ES/L
Métropole–La Réunion 13 septembre 2018

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. On considère l'algorithme ci-contre :
   On affecte 3 à la variable N.
   Que contient la variable S, arrondie au dixième, à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

$v \leftarrow 9$
$S \leftarrow 9$
Pour i allant de 1 à N
$\quad v \leftarrow 0{,}75 \times v$
$\quad S \leftarrow S + v$
Fin Pour

a. $\boxed{24{,}6}$ **b.** -25 **c.** 27 **d.** 20,8

On suit les variables en faisant tourner l'algorithme :

N	v	S
	9	9
1	$0{,}75 \times 9$	$9 + 0{,}75 \times 9$
2	$0{,}75^2 \times 9$	$9 + 0{,}75 \times 9 + 0{,}75^2 \times 9$
3	$0{,}75^3 \times 9$	$9 + 0{,}75 \times 9 + 0{,}75^2 \times 9 + 0{,}75^3 \times 9$

$9 + 0{,}75 \times 9 + 0{,}75^2 \times 9 + 0{,}75^3 \times 9 \approx 24{,}6$.

Réponse a.

2. Soit a un réel, l'expression $\dfrac{2\,\mathrm{e}^{a-1}}{(\mathrm{e}^{a})^2}$ est égale à :

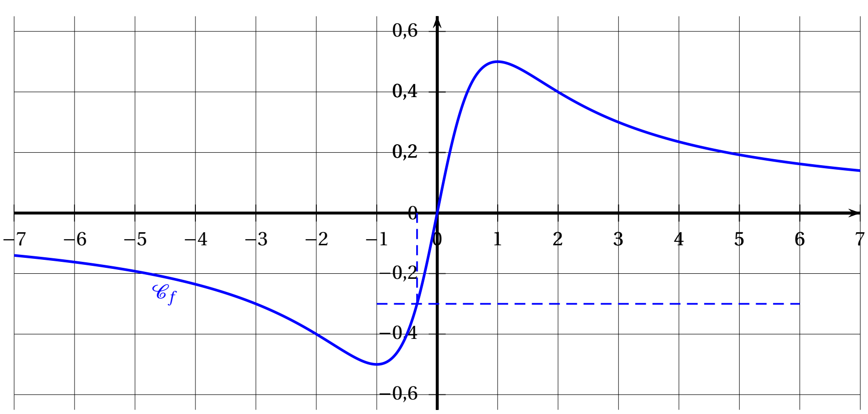
a. 1 **b.** $2\,\mathrm{e}^{3a-1}$ **c.** e^{-2} **d.** $\boxed{\dfrac{2}{\mathrm{e}^{a+1}}}$

$\dfrac{2\,\mathrm{e}^{a-1}}{(\mathrm{e}^{a})^2} = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{a-1}}{\mathrm{e}^{2a}} = 2\,\mathrm{e}^{a-1-2a} = 2\,\mathrm{e}^{-a-1} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{a+1}}$

Réponse d.

Pour les questions 3, 4 et 5, on considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.

On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée de f'.



3. Le nombre de solutions dans $[-7\ ;\ 7]$ de l'équation $f'(x) = 0$ est :

a. 0 **b.** 1 **c.** $\boxed{2}$ **d.** 3

> Il semble qu'il existe deux tangentes horizontales à la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[-7;7]$.
> **Réponse c.**

4. Une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = -0{,}3$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ 6]$ est :

a. -3 **b.** $\boxed{-0{,}3}$ **c.** 0,3 **d.** 3

> Voir les tracés en tirets sur le graphique.
> **Réponse b.**

5. Le nombre de points d'inflexion dans $[-7\ ;\ 7]$ de $\mathcal{C}_f$ est :

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** $\boxed{3}$

> Il semble que les tangentes traversent la courbe 3 fois sur l'intervalle $[-7;7]$.
> **Réponse d.**

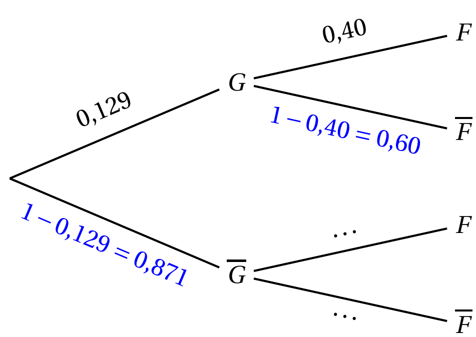
Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Une étude réalisée dans des écoles en France indique que 12,9 % des élèves sont gauchers. Parmi ces gauchers, on trouve 40 % de filles.
On choisit au hasard un élève et on considère les évènements suivants :

- G : « l'élève est gaucher » ;
- F : « l'élève est une fille ».

1. L'arbre pondéré ci-dessous traduit les données de l'exercice :



2. La probabilité que l'élève choisi soit une fille gauchère est :
$P(G \cap F) = P(G) \times P_G(F) = 0{,}129 \times 0{,}40 = 0{,}0516$.

3. Dans ces écoles, il y a 51 % de filles donc $P(F) = 0{,}51$.
D'après la formule des probabilités totales $P(F) = P(G \cap F) + P(\overline{G} \cap F)$, ce qui équivaut à $0{,}51 = 0{,}0516 + P(\overline{G} \cap F)$ ce qui donne $P(\overline{G} \cap F) = 0{,}4584$.

4. Sachant que l'on est en présence d'une élève fille, la probabilité qu'elle soit droitière est :
$P_F(\overline{G}) = \dfrac{P(\overline{G} \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0{,}4584}{0{,}51} \approx 0{,}899$.

Partie B

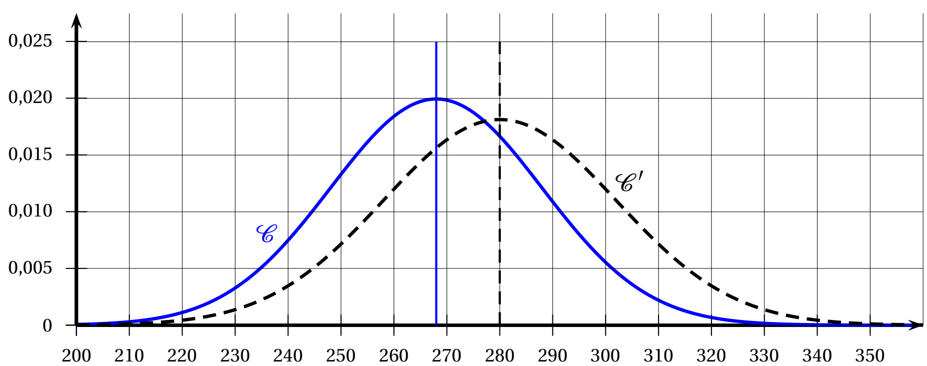
En France, la proportion de gauchers est de 13 % donc on prendra $p = 0{,}13$.
Un club d'escrime compte 230 adhérents dont 110 gauchers.

1. La fréquence de gauchers observée dans le club d'escrime est $f = \dfrac{110}{230} \approx 0{,}478$.
2. À l'aide d'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, on va déterminer si le club d'escrime est représentatif de la population française.
   Autrement dit on va tester l'hypothèse $p = 0{,}13$ dans l'échantillon du club d'escrime composé de $n = 230$ membres.
   $n = 230 \geqslant 30$, $np = 230 \times 0{,}13 = 29{,}9 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 230(1-0{,}13) = 200{,}1 \geqslant 5$ donc il est légitime de déterminer un intervalle de fluctuation de la proportion p de gauchers au seuil de 95 % :
   $$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
   $$= \left[0{,}13 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}13(1-0{,}13)}}{\sqrt{230}}\,;\, 0{,}13 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}13(1-0{,}13)}}{\sqrt{230}}\right] \approx [0{,}086\,;\,0{,}174]$$
   La fréquence f de gauchers dans l'échantillon est de 0,478 ; elle n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation, donc le club d'escrime n'est pas représentatif de la population, au risque de 5 %.

Partie C

Le temps de réaction en milliseconde chez les escrimeurs gauchers est modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 268$ et d'écart type $\sigma_1 = 20$.
Le temps de réaction en milliseconde chez les escrimeurs droitiers est modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 280$ et d'écart type $\sigma_2 = 22$.

1. **a.** À la calculatrice, on trouve $P(X \leqslant 300) \approx 0{,}945$ et $P(Y \leqslant 300) \approx 0{,}818$.
   b. On peut donc dire qu'un gaucher a une probabilité plus grande de réagir en moins de 300 millisecondes qu'un droitier.
2. Sur le graphique ci-dessous, les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ représentent les fonctions de densité des variables aléatoires X et Y.



La courbe représentant une loi normale de moyenne μ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$. La courbe $\mathscr{C}'$ semble symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 280$, donc elle correspond à la variable aléatoire Y. Et donc la courbe $\mathscr{C}$ correspond à la variable aléatoire X.

Exercice 3 **5 points**

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Une école de danse a ouvert ses portes en 2016. Cette année là, elle comptait 800 inscrits.
Chaque année, elle prévoit une augmentation de 15 % des inscriptions ainsi que 90 désinscriptions.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'inscrits l'année $2016 + n$.

Chaque inscrit paye une cotisation annuelle de 150 euros, sur laquelle l'école conserve un bénéfice de 20 euros après avoir payé tous ses frais fixes. L'école économise ce bénéfice afin de construire une nouvelle salle de danse. Pour cela, elle a besoin d'un budget de 125 000 euros.

Partie A

Les données sont saisies dans une feuille de calcul donnée en annexe.
Le format de cellule a été choisi pour que les nombres de la colonne C soient arrondis à l'unité.

1. La formule que l'on saisit en C3 pour obtenir, par recopie vers le bas, le nombre d'inscrits l'année de rang n est `= C2 * 1,15 - 90`.
2. La formule que l'on saisit en E3 pour obtenir, par recopie vers le bas, le bénéfice cumulé à l'année de rang n est `= E2 + D3`
3. On complète sur le tableau donné, les six cellules des lignes qui correspondent aux années 2021 et 2022.

	A	B	C	D	E
1	année	rang de l'année	nombre d'inscrits	bénéfice annuel	bénéfices cumulés
2	2016	0	800	16 000	16 000
3	2017	1	830	16 600	32 600
4	2018	2	865	17 300	49 900
5	2019	3	904	18 080	67 980
6	2020	4	950	19 000	86 980
7	2021	5	1 003	20 060	107 040
8	2022	6	1 063	21 260	128 300

4. L'école dépassera 125 000 euros comme bénéfices cumulés en 2022, c'est donc en 2022 qu'elle pourra construire sa nouvelle salle de danse.

Partie B

1. On passe du nombre d'inscrits l'année n au nombre d'inscrits l'année $n+1$ en ajoutant 15 %, donc en multipliant par $1 + \dfrac{15}{100} = 1{,}15$ puis en retranchant 90; donc, pour tout$n$, on a $u_{n+1} = 1{,}15 u_n - 90$.
   Le nombre d'inscrits en 2016 est 800 donc $u_0 = 800$.
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout n, par $v_n = u_n - 600$, donc $u_n = v_n + 600$.
   a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 600 = 1{,}15 u_n - 90 - 600 = 1{,}15\,(v_n + 600) - 690 = 1{,}15 v_n + 690 - 690 = 1{,}15 v_n$
   $v_0 = u_0 - 600 = 800 - 600 = 200$
   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}15$ et de premier terme $v_0 = 200$.
   b. On en déduit que, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 200 \times 1{,}15^n$.
   c. De $v_n = 200 \times 1{,}15^n$ et $u_n = v_n + 600$, on déduit que $u_n = 200 \times 1{,}15^n + 600$.

3. Cette école accueillera plus de 2 000 adhérents pour la première valeur de n telle que $u_n > 2000$; on résout cette inéquation :

$$\begin{aligned} u_n > 2000 &\iff 200\times 1{,}15^n + 600 > 2000 &&\iff 200\times 1{,}15^n > 1400\\ &\iff 1{,}15^n > 7 &&\iff \ln\left(1{,}15^n\right) > \ln(7)\\ &\iff n\ln(1{,}15) > \ln(7) &&\iff n > \frac{\ln(7)}{\ln(1{,}15}\end{aligned}$$

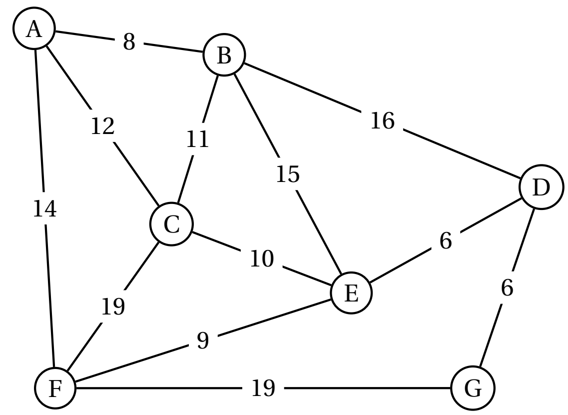
Or $\dfrac{\ln(7)}{\ln(1{,}15} \approx 13{,}9$ donc c'est à partir de $n = 14$ donc de $2016 + 14 = 2030$ que le nombre d'élèves de cette école dépassera 2 000.

Exercice 3 — 5 points

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Un investisseur immobilier doit visiter plusieurs biens à vendre dans une ville. Le graphe ci-contre représente le plan de la ville. Les biens à visiter sont identifiés par les lettres A, B, C, D, E, F et G. Les poids des arêtes sont les durées de parcours, en minute, entre deux biens.



1. **a.** Afin de découvrir la ville, l'investisseur souhaite emprunter, une fois et une seule, chacune des rues reliant les biens.

Ce graphe est connexe car deux sommets quelconques peuvent être reliés entre eux par une chaîne; par exemple la chaîne A - B - C - F - E - D - G permet de relier deux sommets quelconques du graphe.

On détermine les degrés des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	3	4	4	3	4	4	2

Le graphe est connexe et il a exactement 2 sommets de degrés impairs, A et D, donc, d'après le théorème d'Euler, il existe des trajets empruntant une et une seule fois chacune des rues reliant les biens. Ces trajets peuvent partir de A pour arriver à D, ou partir de D pour arriver à A.

b. Par exemple le trajet d'une durée totale de 145 minutes :

$$\text{A} \xrightarrow{8} \text{B} \xrightarrow{11} \text{C} \xrightarrow{12} \text{A} \xrightarrow{14} \text{F} \xrightarrow{19} \text{C} \xrightarrow{10} \text{E} \xrightarrow{9} \text{F} \xrightarrow{19} \text{G} \xrightarrow{6} \text{D} \xrightarrow{6} \text{E} \xrightarrow{15} \text{B} \xrightarrow{16} \text{D}$$

2. Lorsque l'investisseur immobilier termine ses visites par le bien A, il souhaite revenir au bien G le plus rapidement possible; on va déterminer ce plus court chemin à l'aide de l'algorithme de Dijkstra.

A	B	C	D	E	F	G	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	$\cancel{\infty}$ 8 A	$\cancel{\infty}$ 12 A	∞	∞	$\cancel{\infty}$ 14 A	∞	B
		12 A ~~19 B~~	$\cancel{\infty}$ 24 B	$\cancel{\infty}$ 23 B	14 A	∞	C
			24 B	~~23 B~~ 22 C	14 A ~~31 C~~	∞	F
			24 B	22 C ~~23 F~~		$\cancel{\infty}$ 33 F	E
			24 B ~~28 E~~			33 F	D
						~~33 F~~ 30 D	G

Le trajet le plus rapide est : A $\xrightarrow{8}$ B $\xrightarrow{16}$ D $\xrightarrow{6}$ G ; il dure 30 minutes..

Partie B

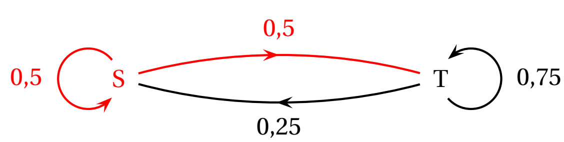
L'investisseur commande une étude sur la population de sa ville qui lui révèle qu'en 2018, 80 % des locataires occupent un studio et 20 % des locataires occupent un T2 (appartement de deux pièces).
Le nombre total de locataires ne varie pas mais chaque année :

- la moitié des locataires en studio le conserve tandis que l'autre moitié change pour un T2 ;
- un quart des locataires en T2 change pour un studio tandis que les autres conservent leur T2.

On considère les événements suivants :

- S : « le locataire occupe un studio » ;
- T : « le locataire occupe un T2 ».

1. On traduit les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets S et T.



2. Pour tout entier naturel n, on note s_n la proportion de locataires en studio et t_n la proportion de locataires en T2 l'année 2018 + n.

a. D'après le texte, on a : $\left\{\begin{array}{rcl} s_{n+1} & = & 0,5\,s_n + 0,25\,t_n \\ t_{n+1} & = & 0,5\,s_n + 0,75\,t_n \end{array}\right.$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$\begin{pmatrix} s_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_n & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix}$

La matrice de transition est donc

- $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$ si l'état à l'instant n est représenté par une matrice ligne.

  On a alors, en posant $P_n = \begin{pmatrix} s_n & t_n \end{pmatrix}$, pour tout n, $P_{n+1} = P_n M$.

- $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0,75 \end{pmatrix}$ si l'état à l'instant n est représenté par une matrice colonne.

  On a alors, en posant $P_n = \begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix}$, pour tout n, $P_{n+1} = MP_n$.

b. D'après le texte, l'état initial est donné par

la matrice ligne $P_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$ ou la matrice colonne $P_0 = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

c. $2023 = 2018 + 5$ donc le pourcentage de locataires en studio en 2023 est s_5.

- **Version ligne**
  On sait que, pour tout n, $P_{n+1} = P_n M$, d'où on déduit que $P_5 = P_0 M^5$.
  À la calculatrice, on trouve $P_5 \approx \begin{pmatrix} 0,334 & 0,666 \end{pmatrix}$.
- **Version colonne**
  On sait que, pour tout n, $P_{n+1} = MP_n$, d'où on déduit que $P_5 = M^5 P_0$.
  À la calculatrice, on trouve $P_5 \approx \begin{pmatrix} 0,334 \\ 0,666 \end{pmatrix}$.

Il y aura donc environ 33,3 % de locataires en studio en 2013.

Remarque du correcteur
En terminale ES, les matrices lignes ne sont pas au programme officiel mais on les utilise souvent dans ce genre d'exercice dans le supérieur ; la matrice de transition est alors « stochastique ».

Exercice 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Une entreprise vend des voitures télécommandées. La vente mensuelle varie entre 1 000 et 5 000 voitures. Une étude montre que la recette mensuelle totale de l'entreprise est de 70 000 euros lorsqu'elle vend 1 000 voitures. On note $r(x)$ la recette mensuelle réalisée par l'entreprise, exprimée en dizaine de milliers d'euros, pour la vente de x milliers de voitures.

1. $r(1)$ est la recette correspondant à la vente de 1 000 voitures, donc 70 000 euros. Donc $r(1)=7$.

2. On admet que, pour tout $x \in [1~;~5]$, la recette mensuelle est modélisée par : $r(x)=6+x+2\ln(x)$.

a. Pour tout $x \in [1~;~5]$, $r'(x)=0+1+2\times\dfrac{1}{x}=1+\dfrac{2}{x}=\dfrac{x+2}{x}$.

b. Sur l'intervalle $[1~;~5]$, $x>0$ et $x+2>0$ donc $r'(x)=\dfrac{x+2}{x}>0$ donc la fonction r est strictement croissante.

3. **a.** $r(1)=7<10$ et $r(5)=6+5+2\ln(5)=11+2\ln(5)\approx 14{,}2>10$
La fonction r est strictement croissante sur $[1;5]$.
Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $r(x)=10$ admet une solution unique α sur $[1;5]$.
En utilisant la calculatrice, on trouve $\alpha\approx 2{,}318$.

b. Pour $x=\alpha$ donc pour une vente de 2 318 voitures, la recette est de 100 000 euros ; on sait que la fonction r est strictement croissante, donc pour avoir une recette d'au moins 100 000 euros, il faut vendre plus de 2 318 voitures soit au moins 2 319..

4. **a.** Soit g la fonction définie pour tout $x \in [1~;~5]$ par $g(x)=2\ln(x)$.
Soit la fonction G définie pour tout $x \in [1~;~5]$ par $G(x)=2x\left[\ln(x)-1\right]$.
$G'(x)=2\times\left[\ln(x)-1\right]+2x\times\left[\dfrac{1}{x}-0\right]=2\ln(x)-2+2=2\ln(x)=g(x)$
Donc G est une primitive de g sur $[1;5]$.

b. La fonction r est définie par $r(x)=6+x+2\ln(x)$ autrement dit $r(x)=6+x+g(x)$; elle a pour primitive la fonction R définie par $R(x)=6x+\dfrac{x^2}{2}+G(x)$ soit $R(x)=6x+\dfrac{x^2}{2}+2x\left[\ln(x)-1\right]$, ou encore $R(x)=4x+\dfrac{x^2}{2}+2x\ln(x)$.

c. La valeur moyenne de la recette totale lorsque l'entreprise vend entre 2 000 et 4 000 voitures télécommandées est dix mille fois la valeur moyenne de la fonction r entre 2 et 4.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4-2}\int_2^4 r(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left[R(4)-R(2)\right]=\frac{1}{2}\left[\left(16+\frac{16}{2}+8\ln(4)\right)-\left(8+\frac{4}{2}+4\ln(2)\right)\right]\\ &=\frac{1}{2}\left[24+8\ln(4)-8-2-4\ln(2)\right]=\frac{1}{2}\left[14+16\ln(2)-4\ln(2)\right]\\ &=\frac{1}{2}\left[14+12\ln(2)\right]=7+6\ln(2)\approx 11{,}159\end{aligned}$$

La valeur moyenne de la recette totale lorsque l'entreprise vend entre 2 000 et 4 000 voitures télécommandées est donc d'environ 111 590 euros.