

**Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord**  
**30 mai 2014**

**Exercice 1**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

**Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à  $10^{-3}$  près.**

**Partie A : Conditionnement des pots**

1. On veut  $p(X \leq 49)$ . Avec la calculatrice  $p(X \leq 49) \approx 0.202$ .
2. On note  $\sigma'$  le nouvel écart-type, et  $Z$  la variable aléatoire égale à  $\frac{X-50}{\sigma'}$ 
  - a. La variable aléatoire  $Z$  suit la loi normale centrée réduite.
  - b. Une valeur approchée du réel  $u$  tel que  $p(Z \leq u) = 0,06$  est  $u \approx -1.555$ .
  - c.  $Z = \frac{X-50}{\sigma'} \Leftrightarrow X = \sigma'Z + 50$

$$p(X \leq 49) = 0,06 \Leftrightarrow p(\sigma'Z + 50 \leq 49) = 0,06 \Leftrightarrow p\left(Z \leq -\frac{1}{\sigma'}\right) = 0,06$$

$$\text{On doit donc avoir } -\frac{1}{\sigma'} = -1,555 \Leftrightarrow \sigma' = \frac{1}{1,555} \approx 0,643$$

La valeur attendue de  $\sigma'$  est donc 0,643.

3.
  - a. Ici, l'épreuve de Bernoulli consiste à tester si un pot est non conforme considéré comme succès de probabilité 0,06,... ou pas.  
On répète 50 fois cette épreuve.  $Y$  suit donc la loi binomiale de paramètres 50 et 0,06.
  - b. On calcule  $p(Y \leq 2)$  avec la calculatrice. La probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes est d'environ 0,416.

**Partie B : Campagne publicitaire**

On a  $n = 140 > 30$ ,  $f = \frac{99}{140}$  donc  $nf = 99 > 5$  et  $n(1-f) = 41 > 5$ . Ainsi,  $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$  soit  $[0,622; 0,792]$  est donc un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

**Exercice 2**

**6 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A : Positions relatives de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{D}$**

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = f(x) - (x-3)$ .

1. Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  
 $g(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} = e^{-x}(5 - 3e^{-x})$ .  
Comme  $e^{-x} > 0$  (exponentielle),  $g(x)$  est du signe de  $5 - 3e^{-x}$ .  
 $5 - 3e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 5 > 3e^{-x} \Leftrightarrow \frac{5}{3} > e^{-x} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{3}\right) > -x \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3}{5}\right) < x$  ce qui est toujours vrai car  $\ln\left(\frac{3}{5}\right) < 0 < x$ .  
Finalement, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  $g(x) > 0$ .
2. La courbe  $\mathcal{C}_f$  et la droite  $\mathcal{D}$  ont un point commun d'abscisse  $x$  si et seulement si  $f(x) = x-3$  soit  $g(x) = 0$  ce qui n'est pas possible car on vient de voir que  $g(x) > 0$ .  
La courbe  $\mathcal{C}_f$  et la droite  $\mathcal{D}$  n'ont pas de point commun.

**Partie B : Étude de la fonction  $g$** 

On note  $M$  le point d'abscisse  $x$  de la courbe  $\mathcal{C}_f$ ,  $N$  le point d'abscisse  $x$  de la droite  $\mathcal{D}$  et on s'intéresse à l'évolution de la distance  $MN$ .

- Comme  $M$  et  $N$  ont la même abscisse, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  
 $MN = |f(x) - (x - 3)| = |g(x)| = g(x)$  car  $g(x) > 0$  d'après la première question.
- Si  $u$  est dérivable,  $(e^u)' = u'e^u$ .  
 La dérivée de  $x \mapsto e^{-x}$  est donc  $x \mapsto -e^{-x}$  et celle de  $x \mapsto e^{-2x}$  est  $x \mapsto -2e^{-2x}$ .  
 Pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  $g'(x) = -5e^{-x} + 2 \times 3e^{-2x} = 6e^{-2x} - 5e^{-x}$ .
- $g$  étant dérivable sur  $[0; +\infty[$ , on étudie le signe de sa dérivée sur  $[0; +\infty[$ . Pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  
 $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6e^{-2x} - 5e^{-x} \geq 0$   
 $\Leftrightarrow 6e^{-x} - 5 \geq 0$  on a divisé par  $e^{-x} > 0$   
 $\Leftrightarrow e^{-x} \geq \frac{5}{6}$   
 $\Leftrightarrow -x \geq \ln\left(\frac{5}{6}\right)$  croissance de la fonction  $\ln$   
 $\Leftrightarrow x \leq \ln\left(\frac{6}{5}\right)$

En  $\ln\left(\frac{6}{5}\right)$ , la dérivée s'annule en changeant de signe (+; -), donc  $g\left(\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right)$  est un maximum pour  $g$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

$$g\left(\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right) = 5 \times e^{\frac{5}{6}} - 3 \times \left(e^{\frac{5}{6}}\right)^2 = 5 \times \frac{5}{6} - 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{36}$$

La distance entre un point de la courbe  $\mathcal{C}_f$  et le point de même abscisse sur la droite  $\mathcal{D}$  est donc maximale lorsque  $x = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$ . Cette distance maximale vaut  $\frac{75}{36}$  unités.

Remarque : Comme le repère est orthogonal (à priori pas orthonormé), il s'agit d'unité en ordonnée.)

**Partie C : Étude d'une aire**

On considère la fonction  $\mathcal{A}$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t - 3)] dt.$$

- $\mathcal{A}(2) = \int_0^2 [f(t) - (t - 3)] dt = \int_0^2 g(t) dt$  et  $g > 0$  sur  $[0; 2]$ .  $\mathcal{A}(2)$  mesure donc (en unités d'aires) l'aire du domaine limité par les droites d'équation  $x = 0$ ,  $x = 2$ , la courbe  $\mathcal{C}_f$  et la droite  $\mathcal{D}$ .
- La fonction  $g$  est continue sur  $[0; +\infty[$  et  $\mathcal{A}(x) = \int_0^x g(t) dt$ , la fonction  $\mathcal{A}$  est donc dérivable sur  $[0; +\infty[$  et  $\mathcal{A}' = g > 0$ . La fonction  $\mathcal{A}$  est donc bien croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- Pour tout réel  $x$  strictement positif,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(x) &= \int_0^x g(t) dt \\
 &= 5 \int_0^x e^{-t} dt - 3 \int_0^x e^{-2t} dt && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
 &= 5[-e^{-t}]_0^x - 3 \left[ -\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^x \\
 &= 5(-e^{-x} + 1) - 3 \left( -\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= 5 - 5e^{-x} + \frac{3}{2} e^{-2x} - \frac{3}{2} \\
 \mathcal{A}(x) &= \frac{3}{2} e^{-2x} - 5e^{-x} + \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

$$4. \mathcal{A}(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} e^{-2x} - 5e^{-x} + \frac{7}{2} = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} e^{-2x} - 5e^{-x} + \frac{3}{2} = 0$$

On pose  $X = e^{-x}$

$$\begin{aligned}
 x \text{ solution de } \frac{3}{2} e^{-2x} - 5e^{-x} + \frac{3}{2} = 0 &\Leftrightarrow X \text{ solution de } \frac{3}{2} X^2 - 5X + \frac{3}{2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow X \text{ solution de } 3X^2 - 10X + 3 = 0 && \text{équation du second degré} \\
 &\Leftrightarrow X = \frac{1}{3} \text{ ou } X = 3 \\
 &\Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{3} \text{ ou } e^{-x} = 3 && \text{on revient à } x \text{ et } X = e^{-x} \\
 &\Leftrightarrow x = \ln 3 \text{ ou } x = -\ln 3 && -\ln \frac{1}{3} = -(-\ln 3) = \ln 3 \\
 &\Leftrightarrow x = \ln 3 && \text{car } x \geq 0 \text{ et } -\ln 3 < 0
 \end{aligned}$$

Finalement,  $\mathcal{A}(x) = 2 \Leftrightarrow x = \ln 3$ .

### Exercice 3

4 points

Commun à tous les candidats

#### Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

- Dans le plan (EFG), les droites (PM) et (FG) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.
- Les droites (LN), (BF) et (CG) sont coplanaires (dans le plan (BCG))... d'où les constructions de T et Q.
  - L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est une droite.

Plusieurs manières de faire cette construction :

— On peut construire 2 points de la droite intersection :

Q est un point de l'intersection des plans (MNP) (car appartient à (LN), où L et N sont dans (MNP)) et (ABF) (car appartient à (BF)).

Dans le plan (EFG), les droites (MP) et (EF) ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes en un point R qui est aussi un point de l'intersection des plans (MNP) (car sur (MP)) et (ABF) (car sur (EF)).

L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est donc la droite (RQ)

— On peut utiliser un point et la direction

On a déjà vu que Q est un point de la droite cherchée.

Les deux plans (ABF) et (CDG) sont parallèles, ils sont donc coupés par le plan (MNP) selon deux droites parallèles. Or, les points P et T sont à la fois dans (MNP) et (CDG), donc l'intersection de ces deux plans est (PT).

L'intersection des plans (MNP) et (ABF) est donc la droite parallèle à (PT) passant par Q.

- Notons S le point d'intersection de (AE) et (QR).

La section du cube par le plan (MNP) est le polygone MPTQS.

#### Partie B

- $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  et  $P\left(\frac{1}{4}; 1; 1\right)$ .
- L est le point d'intersection de (MP) et (FG). On cherche donc une représentation paramétrique de chacune des deux droites (MP) et (FG).

(MP) passe par  $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$  et a pour vecteur directeur  $\vec{u}\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 0\right)$ , une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

(FG) passe par  $F(1; 0; 1)$  et a pour vecteur directeur  $\vec{v}(0; 1; 0)$ , une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}$$

$$L \in (MP) \cap (FG) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ z = 1 \\ x = 1 \\ y = t' \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{1}{4}t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ z = 1 \\ x = 1 \\ y = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 4 \\ z = 1 \\ x = 1 \\ y = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{5}{2} \\ z = 1 \\ t = 4 \\ t' = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Les coordonnées du point L sont  $\left(1; \frac{5}{2}; 1\right)$ .

- $\overrightarrow{TP}\left(-\frac{3}{4}; 0; \frac{3}{8}\right)$  et  $\overrightarrow{TN}\left(0; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{8}\right)$ .

Le repère étant orthonormé, on peut utiliser l'expression analytique du produit scalaire :

$$\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{TN} = -\frac{3}{8} \times \frac{1}{8} \neq 0$$

Le triangle TPN n'est donc pas rectangle en T.

#### Exercice 4

5 points

#### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un volume constant de  $2200 \text{ m}^3$  d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

- "Un volume constant de  $2200 \text{ m}^3$  d'eau est réparti entre deux bassins A et B." donc

$$a_n + b_n = 2200.$$

- Au début du  $n+1$ -ième jour, la bassin A contient  $a_n$ , on ajoute 15% du volume d'eau présent dans le bassin B soit  $0,15b_n$  et on enlève 10% du volume présent dans A au début de la journée :

$$a_{n+1} = a_n + 0,15b_n - 0,1a_n = a_n + 0,15(2200 - a_n) - 0,1a_n = 0,75a_n + 330 = \frac{3}{4}a_n + 330$$

On a bien, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$ .

-

<b>Variables</b>	: $n$ est un entier naturel $a$ est un réel		
<b>Initialisation</b>	: Affecter à $n$ la valeur 0 Affecter à $a$ la valeur 800		
<b>Traitement</b>	: Tant que $a < 1\,100$ , faire : <table style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; margin-left: 20px;"> <tr> <td>Affecter à <math>a</math> la valeur <math>\frac{3}{4}a + 330</math></td> </tr> <tr> <td>Affecter à <math>n</math> la valeur <math>n + 1</math></td> </tr> </table> Fin Tant que	Affecter à $a$ la valeur $\frac{3}{4}a + 330$	Affecter à $n$ la valeur $n + 1$
Affecter à $a$ la valeur $\frac{3}{4}a + 330$			
Affecter à $n$ la valeur $n + 1$			
<b>Sortie</b>	: Afficher $n$		

4. a. Remarque : On peut calculer les premiers termes pour avoir la raison.

Pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= a_{n+1} - 1\,320 && \text{définition de } u_n \\
 &= \frac{3}{4}a_n + 330 - 1\,320 && \text{question 2.} \\
 &= \frac{3}{4}a_n - 990 \\
 &= \frac{3}{4}(a_n - 1\,320) \\
 &= \frac{3}{4}u_n && \text{définition de } u_n
 \end{aligned}$$

On reconnaît la définition d'une suite géométrique de raison  $\frac{3}{4}$ . Son premier terme est  $u_0 = a_0 - 1\,320 = 800 - 1\,320 = -520$ .

- b. On a donc, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = u_0 q^n = -520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$ .

Mais, par définition de  $u_n$ , on a

$$u_n = a_n - 1\,320 \Leftrightarrow a_n = u_n + 1\,320 \Leftrightarrow a_n = 1\,320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Si ce jour arrive, on aura  $a_n + b_n = 2a_n$  mais la conservation du volume global s'écrira alors  $2a_n = 2\,200 \Leftrightarrow a_n = 1\,100$ .

Il faut donc résoudre l'équation  $1\,320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1\,100$  d'inconnue  $n$ .

$$1\,320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1\,100 \Leftrightarrow 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 220 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{11}{26} \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{11}{26}\right)$$

$$\text{Finalement } n = \frac{\ln\left(\frac{11}{26}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 2.99$$

On vérifie :  $a_3 = 1\,100,625$  et  $b_3 = 1\,099,375$  avec  $a_3 - b_3 < 1$ . À la fin du troisième jour, les deux bassins auront le même volume au mètre cube près.