∽ Corrigé du baccalauréat S – Asie ∾

23 juin 2016

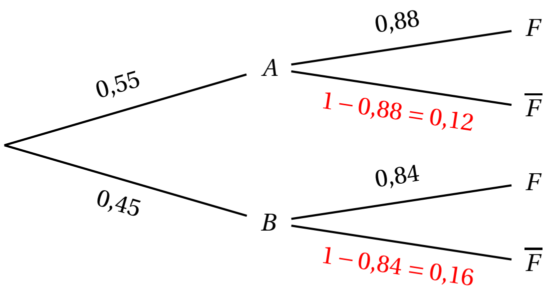
EXERCICE 1 — Commun à tous les candidats — 5 points

Partie A : production de fraises

On appelle :

- A l'évènement « la fleur de fraisier vient de la serre A » ;
- B l'évènement « la fleur de fraisier vient de la serre B » ;
- F l'évènement « la fleur de fraisier donne une fraise » ;
- $\overline{F}$ l'évènement contraire de F.

On résume les données du texte dans un arbre pondéré :



Proposition 1 :
La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

D'après les notations, on cherche la probabilité de l'évènement F ; d'après la formule des probabilités totales :
$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) = P(A) \times P_A(F) + P(B) \times P_B(F) = 0,55 \times 0,88 + 0,45 \times 0,84 = 0,862$
La proposition 1 est vraie.

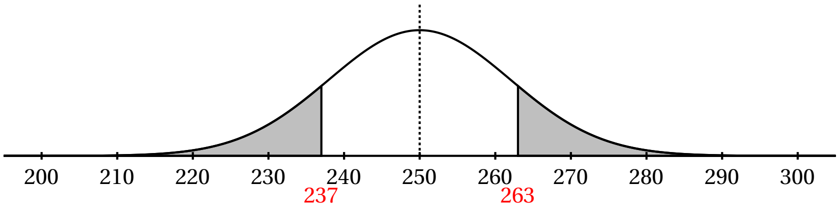
Proposition 2 :
On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne une fleur.
La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

On cherche la probabilité que la fleur provienne de la serre A sachant qu'elle a donné une fraise :
$P_F(A) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,55 \times 0,88}{0,862} \approx 0,561 \neq 0,439$
La proposition 2 est fausse.

Partie B : conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.

1. On donne $P(X \leqslant 237) = 0,14$.
   On complète le graphique donné dans l'énoncé.
   On constate que $237 = 250 - 13 = \mu - 13$ et $263 = 250 + 13 = \mu + 13$.
   Pour des raisons de symétrie de la fonction de densité autour de la droite d'équation $x = \mu$, on a :
   $P(X \leqslant 237) = P(X \geqslant 263)$ (parties grisées sur la figure).



$P(237 < X < 263) = 1 - (P(X \leqslant 237) + P(X \geqslant 263)) = 1 - 2 \times P(X \leqslant 237) = 1 - 2 \times 0{,}14 = 0{,}72$.

La probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes » est 0,72.

2. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$.

a. D'après le cours, la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1 (la loi normale centrée réduite).

b. On sait que σ est un nombre strictement positif ; donc :

$X \leqslant 237 \iff X - 250 \leqslant 237 - 250 \iff \dfrac{X - 250}{\sigma} \leqslant -\dfrac{13}{\sigma} \iff Y \leqslant -\dfrac{13}{\sigma}$

Comme $P(X \leqslant 237) = 0{,}14$, on en déduit que $P\left(Y \leqslant -\dfrac{13}{\sigma}\right) = 0{,}14$.

c. Pour Y suivant la loi normale centrée réduite, on cherche β tel que $P(Y \leqslant \beta) = 0{,}14$; la calculatrice donne pour résultat environ $-1{,}08$. On a donc : $-1{,}08 = -\dfrac{13}{\sigma}$ et donc : $\sigma \approx 12$.

3. Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m deux nombres entiers.

a. Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[250 - n ; 250 + n]$.

D'après le cours, pour toute loi normale, $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$; donc

$P(250 - 2 \times 12 \leqslant X \leqslant 250 + 2 \times 12) \approx 0{,}95$ ou encore $P(250 - 24 \leqslant X \leqslant 250 + 24) \approx 0{,}95$.

Si $n' > n$, alors $[250 - n ; 250 + n] \subset [250 - n' ; 250 + n']$ et donc

$P(X \in [250 - n ; 250 + n]) < P(X \in [250 - n' ; 250 + n'])$.

Donc $n = 24$ est le plus petit entier tel que $P(250 - n \leqslant X \leqslant 250 + n)$.

b. On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme,se trouve dans l'intervalle $[230 ; m]$.

Cherchons m pour que $P(230 \leqslant X \leqslant m)$ soit égal à 0,95.

D'après le cours, on sait que $P(230 \leqslant X \leqslant m) = P(X \leqslant m) - P(X < 230)$.

En utilisant la calculatrice, on trouve que $P(X < 230) \approx 0{,}0478$.

$P(230 \leqslant X \leqslant m) = 0{,}95 \iff P(X \leqslant m) - P(X < 230) = 0{,}95 \iff P(X \leqslant m) = P(X < 230) + 0{,}95 \iff P(X \leqslant m) \approx 0{,}0478 + 0{,}95 \iff P(X \leqslant m) \approx 0{,}9978$

À la calculatrice, si X suit la loi normale d'espérance 250 et d'écart-type 12, le nombre m tel que $P(X \leqslant m) \approx 0{,}9978$ vaut environ 284,2.

Donc la plus petite valeur de m pour laquelle la probabilité que la masse de la barquette se trouve dans l'intervalle $[230 ; m]$ soit supérieure ou égale à 0,95 est $m = 285$.

EXERCICE 2 — Commun à tous les candidats — 3 points

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f_a(x) = a\mathrm{e}^{ax} + a$.

On note $I(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 : $I(a) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

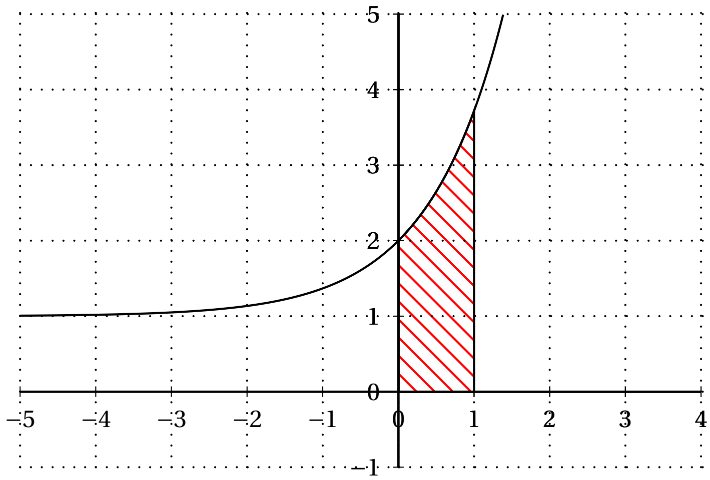
1. On pose dans cette question $a = 0$.

$f_0(x) = 0$ donc $I(0) = \displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$

2. On pose dans cette question $a = 1$.

On étudie donc la fonction f_1 définie sur $\mathbf{R}$ par : $f_1(x) = \mathrm{e}^x + 1$.

a. On représente la fonction f_1 dans un repère orthogonal :



On connaît la représentation graphique de la fonction exponentielle donc on peut, sans étude, représenter la fonction f_1.

b. La fonction F_1 définie par $F_1(x) = \mathrm{e}^x + x$ est une primitive de la fonction f_1.

Donc $I(1) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F_1(x)\Big]_0^1 = F_1(1) - F_1(0) = \left(\mathrm{e}^1 + 1\right) - \left(\mathrm{e}^0 - 0\right) = \mathrm{e} + 1 - 1 = \mathrm{e} \approx 2{,}7$

3. On cherche s'il existe une valeur de a pour laquelle $I(a)$ est égale à 2.

La fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par $F_a(x) = \mathrm{e}^{ax} + ax$ est une primitive de f.

Donc $I(a) = \displaystyle\int_0^1 f_a(x)\,\mathrm{d}x = F_a(1) - F_a(0) = \left(\mathrm{e}^a + a\right) - \left(\mathrm{e}^0 + 0\right) = \mathrm{e}^a + a - 1$

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $g(x) = \mathrm{e}^x + x - 1$.

g est dérivable donc continue et $g'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$ sur $[0\,;\,1]$.

$g(0) = \mathrm{e}^0 + 0 - 1 = 0 < 2$ et $g(1) = \mathrm{e}^1 + 1 - 1 = \mathrm{e} \approx 2{,}72 > 2$

La fonction g est continue et strictement croissante sur $[0\,;\,1]$; $g(0) < 2$ et $g(1) > 2$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 2$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Il existe donc une valeur unique de a dans $[0\,;\,1]$ telle que $I(a) = 2$.

$\left\{\begin{array}{l} f(0{,}7) \approx 1{,}71 < 2 \\ f(0{,}8) \approx 2{,}03 > 2 \end{array}\right. \implies a \in [0{,}7\,;\,0{,}8]$ $\qquad$ $\left\{\begin{array}{l} f(0{,}79) \approx 1{,}99 < 2 \\ f(0{,}80) \approx 2{,}03 > 2 \end{array}\right. \implies a \in [0{,}79\,;\,0{,}80]$

EXERCICE 3 — Commun à tous les candidats — 7 points

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1\,000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100.$$

1. a. On appelle u_n la masse, en gramme, des bactéries présentes dans la cuve, et n représente le nombre de jours depuis le début du processus. On a donc $u_0 = 1000$ puisqu'initialement, on introduit 1 kg soit 1 000 grammes de bactéries.

D'un jour à l'autre, le nombre de bactéries augmente de 10 %, c'est donc qu'il est multiplié par $1 + \dfrac{20}{100} = 1{,}2$. Chaque jour, en remplaçant le milieu nutritif, on perd 100 grammes de bactéries.
Donc, pour tout n, $u_{n+1} = 1{,}2\,u_n - 100$ avec $u_0 = 1000$.

b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg soit 30 000 g.

On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 30000$.

À la calculatrice, on trouve $u_{22} \approx 28103$ et $u_{23} \approx 33624$; donc on dépasse 30 kg de bactéries à partir de 23 jours.

c. On complète l'algorithme :

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1 000
	n prend la valeur 0
	Tant que $u \leqslant 30000$ faire
	    u prend la valeur $1{,}2 \times u - 100$
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher n

2. a. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n \geqslant 1000$.

- $u_0 = 1000 \geqslant 1000$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- On suppose la propriété vraie pour un rang quelconque $p \in \mathbf{N}$, $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_p \geqslant 1000$.
  $u_{p+1} = 1{,}2\,u_p - 100$; $u_p \geqslant 1000$ donc $1{,}2\,u_p \geqslant 1200$ donc $1{,}2\,u_p - 100 \geqslant 1100$.
  Donc $1{,}2\,u_p - 100 \geqslant 1000$ et on a démontré que la propriété était vraie au rang $p+1$.
- La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc d'après le principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Pour tout n, $u_n \geqslant 1000$.

b. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 1{,}2\,u_n - 100 - u_n = 0{,}2\,u_n - 100$

Or, pour tout n, $u_n \geqslant 1000$ donc $0{,}2\,u_n \geqslant 200$ et donc $0{,}2\,u_n - 100 \geqslant 100$

On a donc démontré que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$.

On peut donc dire que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$ donc, $u_n = v_n + 500$.

a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1{,}2\,u_n - 100 - 500 = 1{,}2(v_n + 500) - 600 = 1{,}2\,v_n + 600 - 600 = 1{,}2\,v_n$

$v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}2$ et de premier terme $v_0 = 500$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1{,}2^n$.

Comme, pour tout n, $u_n = v_n + 500$, on en déduit que $u_n = 500 + 500 \times 1{,}2^n$.

c. La suite (v_n) est géométrique de raison 1,2 et de premier terme positif ; or $1{,}2 > 1$ donc, d'après le cours, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Pour tout n, $u_n = v_n + 500$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Partie B : second modèle – avec une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}}$.

1. a. $f(0)=\dfrac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{0}}=\dfrac{50}{1+49}=1$

   b. Pour tout t, $\mathrm{e}^{-0,2t}>0$ donc $1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}>1$ et donc $\dfrac{1}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}}<1$

   On en déduit que $\dfrac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}}<50$ et donc que, pour tout t, $f(t)<50$.

   c. La fonction $t\longmapsto -0,2t$ est décroissante sur $\mathbf{R}$. La fonction $x\longmapsto \mathrm{e}^{x}$ est croissante sur $\mathbf{R}$ donc, par composition, la fonction $t\longmapsto \mathrm{e}^{-0,2t}$ est décroissante sur $\mathbf{R}$.

   On en déduit que la fonction $t\longmapsto 1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}$ est décroissante sur $\mathbf{R}$.

   La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc, par composition, la fonction $t\longmapsto\dfrac{1}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}}$ est croissante sur $\mathbf{R}$.

   On en conclut que la fonction f est croissante sur $\mathbf{R}$ donc sur $[0\,;\,+\infty[$.

   d. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -0,2t=-\infty$; on pose $T=-0,2t$. Or $\displaystyle\lim_{T\to-\infty}\mathrm{e}^{T}=0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-0,2t}=0$.

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}=1$ et donc que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}f(t)=50$.

2. On sait que $f(t)$ représente la masse, en kg, de bactéries au temps t, exprimé en jours.

   - $f(0)=1$ signifie que la masse des bactéries à l'instant $t=0$ est de 1 kg ;
   - $f(t)<50$ pour tout t signifie que la masse de bactéries dans la cuve sera toujours inférieure à 50 kg ;
   - f est croissante signifie que la masse de bactéries augmente régulièrement au fil du temps ;
   - $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}f(t)=50$ signifie que la masse de bactéries dans la cuve va se rapprocher de 50 kg.

3. On résout l'inéquation d'inconnue t : $f(t)>30$:

$$\begin{array}{rcll}
f(t)>30 & \iff & \dfrac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}}>30 & \\
& \iff & 50>30+30\times49\,\mathrm{e}^{-0,2t} & \text{car } 1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}>0 \text{ pour tout } t\\
& \iff & \dfrac{50-30}{30\times49}>\mathrm{e}^{-0,2t} & \\
& \iff & \dfrac{2}{147}>\mathrm{e}^{-0,2t} & \\
& \iff & \ln\left(\dfrac{2}{147}\right)>-0,2t & \text{croissance de la fonction ln sur } [0\,;\,+\infty[\\
& \iff & \dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{147}\right)}{-0,2}<t & \text{division par un nombre négatif}
\end{array}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{147}\right)}{-0,2}\approx 21,5$ donc on en conclut que la masse de bactéries dépassera 30 kg au bout de 22 jours.

Partie C : un contrôle de qualité

On prend un échantillon de taille $n=200$ et dans lequel l'entreprise affirme que 80 % des bactéries (celles de type A) produiront une protéine ; donc la proportion de bactéries de type A est $p=0,8$.
$n=200pg50$; $np=160\geqslant 5$ et $n(1-p)=40\geqslant 5$ donc les conditions sont vérifiées pour qu'on établisse un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,8-1,96\frac{\sqrt{0,8\times0,2}}{\sqrt{200}}\,;\,0,8+1,96\frac{\sqrt{0,8\times0,2}}{\sqrt{200}}\right]\approx[0,74\,;\,0,86]$$

La fréquence de bactéries dans l'échantillon est de $f = \dfrac{146}{200} = 0{,}73$; cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation calculé.
Donc, au risque de 5 % ; on peut remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 4 points

1. *Propriété des catadioptres*

Un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(a\,;b\,;c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC).
Après réflexion sur le plan (OAB), le rayon a un vecteur directeur de coordonnées $(a\,;b\,;-c)$.
Après réflexion sur le plan (OBC), le rayon a un vecteur directeur de coordonnées $(-a\,;b\,;-c)$.
Après réflexion sur le plan (OAC), le rayon a un vecteur directeur de coordonnées $(-a\,;-b\,;-c)$ donc qui est égal à $-\overrightarrow{v}$; le rayon final est donc parallèle au rayon initial.

2. *Réflexion de d_2 sur le plan* (OBC)

a. La droite d_2 passe par le point $\mathrm{I}_1\,(2\,;\,3\,;\,0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}\,(-2\,;-1\,;1)$, donc d_2 a pour représentation paramétrique

$$d_2 : \left\{\begin{array}{l c l} x &=& 2-2t\\ y &=& 3-\ \ t\\ z &=& \quad\ \ t\end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbf{R}.$$

b. Le plan (OBC) a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ de coordonnées $(1\,;\,0\,;\,0)$.
Le plan (OBC) a pour équation $x = 0$.

c. Soit I_2 le point de coordonnées $(0\,;2\,;1)$.

- $x_{\mathrm{I}_2} = 0$ donc le point I_2 appartient au plan (OBC) d'équation $x = 0$.
- On regarde si la droite d_2 contient le point I_2 autrement dit s'il existe une valeur du paramètre t telle que $\left\{\begin{array}{l c l} 0 &=& 2-2t\\ 2 &=& 3-\ \ t\\ 1 &=& \quad\ \ t\end{array}\right.$
  C'est vrai pour $t = 1$ donc $\mathrm{I}_2 \in d_2$.
- Le point I_1 appartient à la droite d_2 mais n'appartient pas au plan (OBC) car son abscisse est non nulle ; la droite d_2 n'est donc pas contenue dans le plan (OBC).

On a donc démontré que le plan (OBC) et la droite d_2 étaient sécants en I_2.

3. *Réflexion de d_3 sur le plan* (OAC)

La droite d_3 passe par le point $\mathrm{I}_2\,(0\,;\,2\,;\,1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$; elle a donc pour représentation paramétrique :

$$d_3 : \left\{\begin{array}{l c l} x &=& \quad\ \ 2t\\ y &=& 2-\ \ t\\ z &=& 1+\ \ t\end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbf{R}.$$

La plan (OAC) a pour équation $y = 0$.
Pour déterminer le point d'intersection de la droite d_3 et du plan (OAC), on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x &=& \quad\ \ 2t\\ y &=& 2-\ \ t\\ z &=& 1+\ \ t\\ y &=& 0\end{array}\right.$$

$y = 0$ et $y = 2 - t$ entraîne $t = 2$ donc $x = 4$ et $z = 3$.
Le point I_3 d'intersection de d_3 et du plan (OAC) a pour coordonnées (4 ; 0 ; 3).

4. *Étude du trajet de la lumière*
On donne le vecteur $\overrightarrow{u}\,(1\,;-2\,;0)$, et on note $\mathcal{P}$ le plan défini par les droites d_1 et d_2.

a.
- Le plan $\mathcal{P}$ est défini par les droites d_1 et d_2 donc il a pour vecteurs directeurs les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ qui ne sont pas colinéaires.
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_1} = -2+2+0 = 0$ donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v_1}$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_2} = -2+2+0 = 0$ donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v_2}$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}$, donc $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

b. Le plan $\mathcal{P}$ contient les droites d_1 et d_2 ; les trois droites d_1, d_2 et d_3 seront dans un même plan si et seulement si elles sont dans le plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire si et seulement si la droite d_3 est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.
On cherche une équation du plan $\mathcal{P}$.
Le plan $\mathcal{P}$ a le vecteur $\overrightarrow{u}$ pour vecteur normal et il contient le point I_1 qui appartient à d_1 ; donc :
$\mathcal{P} = \left\{ M \,/\, \overrightarrow{I_1M} \perp \overrightarrow{u} \right\}$
Si on appelle $(x\,;\,y\,;\,z)$ les coordonnées de M, les coordonnées de $\overrightarrow{I_1M}$ sont $(x-2\,;\,y-3;\,z)$.
$\overrightarrow{I_1M} \perp \overrightarrow{u} \iff \overrightarrow{I_1M}.\overrightarrow{u} = 0 \iff (x-2)(1)+(y-3)(-2)+z(0) = 0 \iff x-2y+4 = 0$
Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $x - 2y + 4 = 0$.
La droite d_3 a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbf{R}$.
En prenant $t = 1$, on prouve que le point H (2 ; 1 ; 2) appartient à d_3.
Mais $x_H - 2y_H + 4 = 4 \neq 0$ donc $H \notin \mathcal{P}$.
La droite d_3 n'est pas contenue dans $\mathcal{P}$ donc les trois droites d_1, d_2 et d_3 ne sont pas situées dans un même plan.

c. Le plan $\mathcal{P}$ contient les droites d_1 et d_2 ; les trois droites d_1, d_2 et d_4 seront dans un même plan si et seulement si elles sont dans le plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire si et seulement si la droite d_4 est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.
La droite d_4 représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC) ; le point d'intersection du rayon avec le plan (OAC) est le point I_3 (4 ; 0 ; 3) donc $I_3 \in d_4$.
$x_{I_3} - 2y_{I_3} + 4 = 8 \neq 0$ donc $I_3 \notin \mathcal{P}$
La droite d_4 n'est pas contenue dans le plan $\mathcal{P}$, donc les trois droites d_1, d_2 et d_4 ne sont pas situées dans un même plan.

EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 4 points

Partie A : quelques résultats

1. On considère l'équation $(E) : 9d - 26m = 1$, où d et m désignent deux entiers relatifs.

a. Les nombres 9 et 26 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de BÉZOUT, l'équation (E) : $9d - 26m = 1$ admet des solutions entières.
$9 \times 3 - 26 \times 1 = 1$ donc le couple (3 ; 1) est solution de l'équation (E).

b. Le couple $(d\,;\,m)$ est solution de (E) si et seulement si $9d - 26m = 1$
si et seulement si $9d - 26m = 9 \times 3 - 26 \times 1$
si et seulement si $9(d-3) - 26(m-1) = 0$
si et seulement si $9(d-3) = 26(m-1)$

c. $9(d-3) = 26(m-1)$ donc 9 divise $26(m-1)$. Or 9 et 26 sont premiers entre eux donc, d'apèrs le théorème de GAUSS, 9 divise $m-1$. On peut donc écrire $m-1$ sous la forme $9k$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Donc $m = 9k+1$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

$9(d-3) = 26(m-1)$ et $m-1 = 9k$ donc $9(d-3) = 26 \times 9k$ ce qui équivaut à $d-3 = 26k$ ou encore $d = 26k+3$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

Réciproquement, si $d = 26k+3$ et $m = 9k+1$ avec $k \in \mathbf{Z}$, alors
$9d-26m = 9(26k+3)-26(9k+1) = 9\times 26k+27-26\times 9k-26 = 1$ et donc le couple $(d\ ;\ m)$ est solution de (E).

Les solutions de l'équation (E) sont donc les couples $(d\ ;\ m)$ tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} d & = & 26k+3 \\ m & = & 9k+1 \end{array}\right., \text{ avec } k \in \mathbf{Z}.$$

2. a. Soit n un nombre entier.

$n = 26k-1 \iff 26k-n = 1 \iff 26k+n(-1) = 1$

Il existe donc deux entiers relatifs k et -1 tels que $26k+n(-1) = 1$ donc, d'après le théorème de BÉZOUT, les nombres n et 26 sont premiers entre eux.

b. Soit $n = 9d-28$, avec $d = 26k+3$ et $k \in \mathbf{Z}$.

$n = 9d-28 = 9(26k+3)-28 = 9\times 26k+27-28 = 26(9k)-1 = 26K-1$ où $K \in \mathbf{Z}$

D'après la question précédente, on peut déduire que $n = 9d-28$ et 26 sont premiers entre eux.

Partie B : cryptage et décryptage

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

1. En cryptant par cette méthode le mot « PION », on obtient « LZWH » ; on veut crypter le mot « ESPION ».

Les lettres ES correspondent à la matrice colonne $\begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36+72 \\ 28+54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108 \\ 82 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} 108 = 4\times 26+4 \text{ donc } 108 \equiv 4 \text{ modulo } 26 \\ 82 = 3\times 26+4 \text{ donc } 82 \equiv 4 \text{ modulo } 26 \end{array}\right\}$ donc $\begin{pmatrix} 108 \\ 82 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ modulo 26 ce qui correspond à EE.

Le mot ESPION se code donc en EELZWH.

2. Méthode de décryptage

a. $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$; $\det(A) = 9\times 3-4\times 7 = -1 \neq 0$ donc la matrice A est inversible.

On trouve son inverse à la calculatrice : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$

b. Au cryptage, une matrice colonne X correspondant à deux lettres, est d'abord transformée en la matrice Y telle que $AX = Y$. Puis on cherche la matrice Y' composée de nombres entiers entre 0 et 25 et telle que $Y' \equiv Y$ modulo 26.

Au décryptage, on cherche la matrice colonne Y correspondant aux deux lettres à décrypter. Puis on détermine la matrice X telle que $AX = Y$, autrement dit telle que $X = A^{-1}Y$. Enfin on détermine la matrice colonne X' composée des restes des éléments de X modulo 26.

Comme $X \equiv X'$ modulo 26, d'après le texte $AX \equiv AX'$ modulo 26 et donc AX et AX' correspondent à la même matrice colonne Y modulo 26 ; ce qui valide le processus de décryptage.

Pour décrypter les lettres XQ, on cherche la matrice colonne correspondant à ces deux lettres : $\begin{pmatrix} 23 \\ 16 \end{pmatrix}$ puis on multiplie à gauche par la matrice A^{-1}

$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 23 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\times 23+4\times 16 \\ 7\times 23-9\times 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 21 \\ 17 \end{pmatrix}$ modulo 26 ce qui correspond à VR.

On fait de même avec GY représenté par $\begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \times 6 + 4 \times 24 \\ 7 \times 6 - 9 \times 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ -174 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ modulo 26 ce qui correspond à AI.

Le mot XQGY se décode en VRAI.