

∞ Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ∞

17 novembre 2016

**EXERCICE 1**

**Commun à tous les candidats**

**4 points**

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = xe^{-x} - 0,1$ .

- D'après le cours, on sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ; donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -0,1$ .
- La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et  $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1)e^{-x} - 0 = (1-x)e^{-x}$ .  
Pour tout  $x$ ,  $e^{-x} > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $1-x$  sur  $[0; +\infty[$ .  
 $f(0) = -0,1$ ;  $f(1) = e^{-1} - 0,1 \approx 0,27 > 0$   
On construit le tableau de variations de  $f$  :

$x$	0	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-0,1	$e^{-1} - 0,1$	-0,1

- $f(0) = -0,1 < 0$  et  $f(1) \approx 0,27 > 0$ ; on complète le tableau de variations

$x$	0	$\alpha$	1	$+\infty$
$f(x)$	-0,1	0	$e^{-1} - 0,1$	-0,1

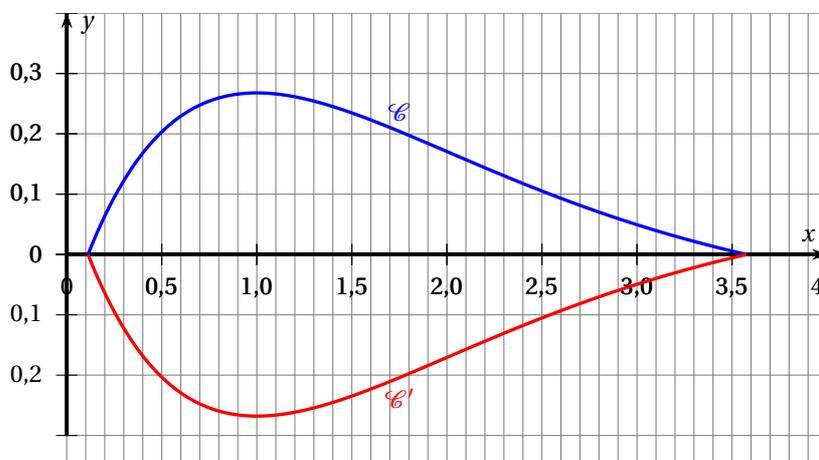
D'après le tableau de variations, l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

On admet l'existence du nombre réel strictement positif  $\beta$  tel que  $\alpha < \beta$  et  $f(\beta) = 0$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[\alpha; \beta]$  dans un repère orthogonal et  $\mathcal{C}'$  la courbe symétrique de  $\mathcal{C}$  par rapport à l'axe des abscisses.

Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.

- Soit  $F$  la fonction définie sur l'intervalle  $[\alpha; \beta]$  par  $F(x) = -(x+1)e^{-x} - 0,1x$ .  
La fonction  $F$  est dérivable sur  $[\alpha; \beta]$  et  
 $F'(x) = -1 \times e^{-x} - (x+1) \times (-1)e^{-x} - 0,1 = (-1+x+1)e^{-x} - 0,1 = xe^{-x} - 0,1 = f(x)$   
Donc la fonction  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $[\alpha; \beta]$ .



5. La fonction  $f$  est positive sur  $[\alpha ; \beta]$  donc l'aire du domaine compris entre la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations  $x = \alpha$  et  $x = \beta$  est  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ .

Pour des raisons de symétrie, l'aire du domaine compris entre les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  est  $\mathcal{A} = 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ .

$$\mathcal{A} = 2 \times [F(\beta) - F(\alpha)] \approx 2 \times [F(3,577) - F(0,112)] \approx 1,04$$

L'aire du domaine compris entre les deux courbes est approximativement de 1,04 unité d'aire.

6. L'unité sur chaque axe représente 5 mètres, donc une unité d'aire est égale à 25 m<sup>2</sup>.  
 L'aire du domaine entre les deux courbes est donc approximativement de 1,04 × 25 = 26 m<sup>2</sup>.  
 On peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré donc sur 26 m<sup>2</sup> on en disposera 26 × 36 = 936 plants de tulipes.

**EXERCICE 2**

**Commun à tous les candidats**

**4 points**

La société « Bonne Mamie » utilise une machine pour remplir à la chaîne des pots de confiture. On note  $X$  la variable aléatoire qui à chaque pot de confiture produit associe la masse de confiture qu'il contient, exprimée en grammes.

Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que  $X$  suit une loi normale de moyenne  $\mu = 125$  et d'écart-type  $\sigma$ .

1. a. La fonction de Gauss est symétrique par rapport à la droite d'équation  $x = \mu$  c'est-à-dire  $x = 125$ .  
 On a donc, pour tout réel  $t$  positif,  $P(X \leq 125 - t) = P(X \geq 125 + t)$ .  
 b. On sait que 2,3% des pots de confiture contiennent moins de 121 grammes de confiture, donc  $P(X < 121) = 0,023$ .

$$\begin{aligned} P(121 \leq X \leq 129) &= P(\overline{(X < 121) \cup (X > 129)}) \\ &= 1 - P(X < 121) - P(X > 129) \\ &= 1 - P(X \leq 121) - P(X \geq 129) \end{aligned}$$

les événements  $(X \leq 121)$  et  $(X \geq 129)$  étant incompatibles.

D'après la question précédente,  $P(X \leq 121) = P(X \leq 125 - 4) = P(X \geq 125 + 4) = P(X \geq 129)$ ; on en déduit :  $P(121 \leq X \leq 129) = 1 - 2P(X \leq 125 - 4) = 1 - 2P(X \leq 121) = 1 - 0,046 = 0,954$ .

2. On cherche une valeur arrondie à l'unité près de  $\sigma$  telle que  $P(123 \leq X \leq 127) = 0,68$ .

On se ramène à la loi normale centrée réduite de  $X$  en posant  $Z = \frac{X - 125}{\sigma}$ .

$$123 \leq X \leq 127 \iff 123 - 125 \leq X - 125 \leq 127 - 125 \iff \frac{-2}{\sigma} \leq \frac{X - 125}{\sigma} \leq \frac{2}{\sigma}$$

$$\text{On a alors : } P(123 \leq X \leq 127) = 0,68 \iff P\left(-\frac{2}{\sigma} \leq Z \leq \frac{2}{\sigma}\right) = 0,68.$$

à l'aide de la calculatrice, on trouve l'intervalle centré en 0 correspondant soit  $\frac{2}{\sigma} \approx 0,994$ . à l'unité près, on prendra donc  $\sigma \approx \frac{2}{0,994} \approx 2$  (ce qui est la valeur de  $\sigma$  supposée juste après dans l'énoncé!).

3. On estime qu'un pot de confiture est conforme lorsque la masse de confiture qu'il contient est comprise entre 120 et 130 grammes.

a. à l'aide de la calculatrice, la probabilité qu'un pot soit conforme correspond à  $P(120 \leq X \leq 130) \approx 0,9876$ .

b. La probabilité qu'un pot ne soit pas conforme parmi ceux qui ont une masse de confiture inférieure à 130 grammes correspond à

$$\begin{aligned} P_{(X \leq 130)}(\overline{120 \leq X \leq 130}) &= \frac{P(\overline{(120 \leq X \leq 130)} \cap (X \leq 130))}{P(X \leq 130)} \\ &= \frac{P(X \leq 120)}{P(X \leq 130)} \approx \frac{0,00621}{0,992379} \\ &\approx 6,1 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

4. Comme  $900 \geq 30$ ,  $900 \times 0,988 \geq 5$  et  $900 \times (1 - 0,988) \geq 5$ , les conditions d'application du théorème de Moivre-Laplace sont vérifiées et un intervalle de fluctuation au seuil de 95% est :

$$\begin{aligned} I_{95\%} &= \left[ p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] \\ &= \left[ 0,988 - 1,96\sqrt{\frac{0,988(1-0,988)}{900}} ; 0,988 + 1,96\sqrt{\frac{0,988(1-0,988)}{900}} \right] \\ &\approx [0,980 ; 0,996]. \end{aligned}$$

Comme  $f_{\text{obs}} = \frac{871}{900} \approx 0,968 \notin I_{95\%}$ , on rejette l'hypothèse « La machine est bien réglée » au seuil des 95%.

### EXERCICE 3

### Commun à tous les candidats

4 points

On se place dans le plan complexe rapporté au repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $f$  la transformation qui à tout nombre complexe  $z$  non nul associe le nombre complexe  $f(z)$  défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On note  $M$  le point d'affixe  $z$  et  $M'$  le point d'affixe  $f(z)$ .

1. On appelle  $A$  le point d'affixe  $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

a.  $|a|^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ; donc  $|a| = 1$

On cherche le réel  $\alpha$  tel que 
$$\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ Donc } \alpha = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \text{ avec } k \text{ entier relatif}$$

La forme exponentielle de  $a$  est  $e^{\frac{3\pi}{4}i}$ .

b. On sait que, pour tout complexe  $z$ ,  $z\bar{z} = |z|^2$  donc  $a\bar{a} = |a|^2 = 1$ .

$$f(a) = a + \frac{1}{a} = a + \frac{\bar{a}}{a\bar{a}} = a + \bar{a} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

La forme algébrique de  $f(a)$  est  $-\sqrt{2}$ .

2. On résout, dans l'ensemble des nombres complexes non nuls, l'équation  $f(z) = 1$  :

$$f(z) = 1 \iff z + \frac{1}{z} = 1 \iff \frac{z^2 + 1}{z} = \frac{z}{z} \iff \frac{z^2 - z + 1}{z} = 0 \iff z^2 - z + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 \text{ donc l'équation admet deux solutions conjuguées } z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Soit  $M$  un point d'affixe  $z$  du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon 1.

a. Le nombre complexe  $z$  s'écrit sous forme exponentielle :  $|z|e^{i\theta}$ .

Le point  $M(z)$  est sur le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 donc  $OM = 1$  ce qui veut dire que  $|z| = 1$ .

Donc  $z$  peut s'écrire sous la forme  $e^{i\theta}$ .

b.  $f(z) = z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

Les deux nombres complexes  $e^{i\theta}$  et  $e^{-i\theta}$  sont deux nombres complexes conjugués donc leur somme est un réel (le double de leur partie réelle).

Donc  $f(z)$  est un réel.

4. On cherche  $M(z)$  tel que  $f(z)$  soit réel.

Posons  $z = x + iy$  :

$$f(z) = z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{1}{x + iy} = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x(x^2 + y^2) + iy(x^2 + y^2) + x - iy}{x^2 + y^2}$$

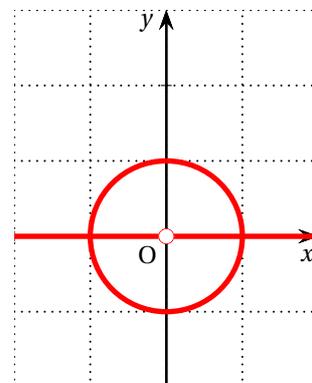
$$= \frac{x(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2} + i\frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2}$$

$f(z)$  est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, autrement dit si  $y(x^2 + y^2 - 1) = 0$ .

Ce qui signifie que soit  $y = 0$  soit  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

- $y = 0$  veut dire que la partie réelle de  $z$  est nulle donc que le point  $M$  se trouve sur l'axe des abscisses. Mais il ne faut pas oublier de retirer l'origine  $O$  du repère car  $z$  doit être non nul.
- $x^2 + y^2 - 1 = 0 \iff x^2 + y^2 = 1$  est l'équation du cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $f(z)$  soit réel est la réunion de l'axe des abscisses privé du point  $O$ , et du cercle de centre  $O$  et de rayon 1.



**EXERCICE 4**

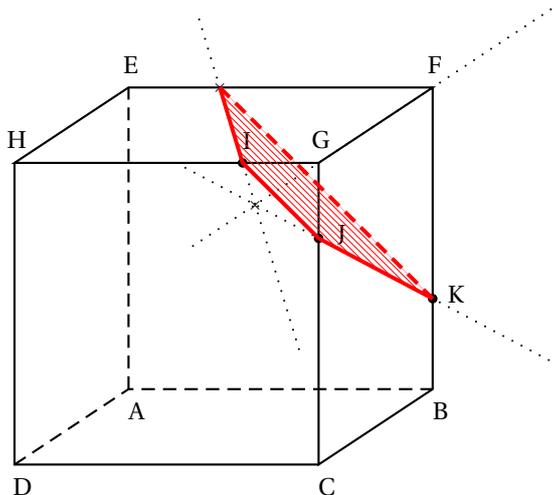
**Commun à tous les candidats**

**3 points**

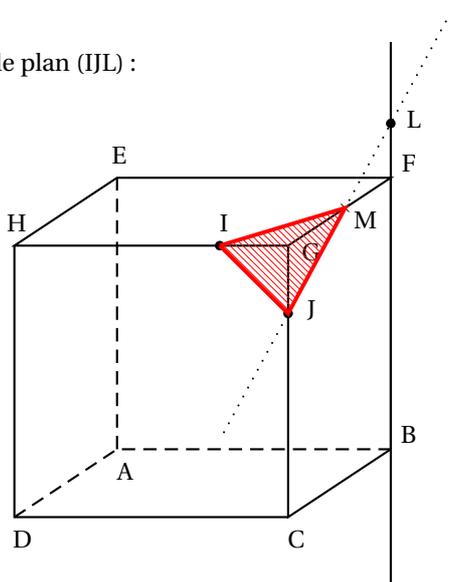
On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.

On définit les points I et J respectivement par  $\vec{HI} = \frac{3}{4}\vec{HG}$  et  $\vec{JG} = \frac{1}{4}\vec{CG}$ .

1. On trace la section du cube par le plan (IJK) :



2. On trace la section du cube par le plan (IJL) :



3. On cherche s'il existe un point P de la droite (BF) tel que la section du cube par le plan (IJP) soit un triangle équilatéral.

On regarde la configuration de la question précédente et on se demande s'il n'y a pas une position du point L sur la droite (BF) telle que les points B, F et L soient dans cet ordre, pour laquelle le triangle IJM serait équilatéral.

Soit K le point de [GF] tel que  $\vec{GK} = \frac{1}{4}\vec{GF}$ .

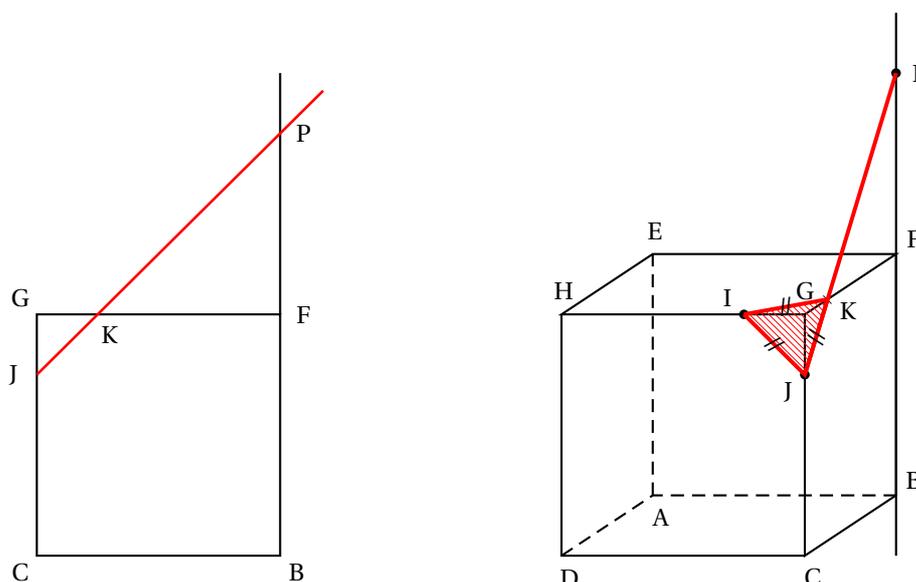
Les trois triangles GJ, GJK et GIK sont superposables donc  $IJ = JK = KJ$ ; le triangle IJK est donc équilatéral.

Soit P le point d'intersection des droites (JK) et (BF).

D'après le théorème de Thalès dans les triangles KGJ et KFP, on a  $\frac{FP}{GJ} = \frac{KF}{KG}$ .

Par construction du point K, on a  $\frac{KF}{KG} = 3$  et on sait que, si on appelle  $a$  la longueur d'une arête du cube,  $GJ = \frac{a}{4}$ ; on en déduit que  $FP = \frac{3a}{4}$ .

Le point P tel que le triangle IJK est équilatéral, est défini par la relation vectorielle  $\vec{FP} = \frac{3}{4}\vec{BF}$ .



**EXERCICE 5 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points**

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.

Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.

Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera  $c$  ce nombre exprimé en dizaines de milliers.

On note  $u_0$  le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n$  désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la  $n$ -ième année. Ainsi, on a  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,8u_n + c$ .

**Partie A**

On suppose dans cette partie seulement que  $c = 1$ , donc pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$ .

1. On calcule, à la calculatrice,  $u_n$  pour les premières valeurs de  $n$  (valeurs de  $u_n$  arrondies) :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$u_n$	1	1,8	2,44	2,95	3,36	3,69	3,95	4,16	4,33	...

$n$	...	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$u_n$	...	4,95	4,96	4,97	4,976	4,981	4,985	4,988	4,990	4,992

La suite  $(u_n)$  semble croissante et semble converger vers le nombre 5.

2. Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété  $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$ .

• **Initialisation**

Pour  $n = 0$ ,  $u_0 = 1$  et  $5 - 4 \times 0,8^0 = 5 - 4 = 1$ . Donc la propriété  $\mathcal{P}_0$  est vérifiée.

• **Hérédité**

Soit  $n$  un entier naturel quelconque.

On suppose que la propriété est vraie pour le rang  $n$  c'est-à-dire  $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$  (c'est l'hypothèse de récurrence), et on veut démontrer qu'elle est encore vraie pour le rang  $n + 1$ .

$u_{n+1} = 0,8u_n + 1$ . Or, d'après l'hypothèse de récurrence  $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$ ; donc :

$$u_{n+1} = 0,8(5 - 4 \times 0,8^n) + 1 = 0,8 \times 5 - 4 \times 0,8^{n+1} + 1 = 4 - 4 \times 0,8^{n+1} + 1 = 5 - 4 \times 0,8^{n+1}$$

Donc la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

On a démontré que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$ .

La propriété  $\mathcal{P}_n$  est donc héréditaire pour tout  $n$ .

• **Conclusion**

La propriété est vraie pour  $n = 0$ .

Elle est héréditaire à partir du rang 0.

Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

On a donc démontré que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$ .

3. •  $u_{n+1} - u_n = (5 - 4 \times 0,8^{n+1}) - (5 - 4 \times 0,8^n) = 5 - 4 \times 0,8^{n+1} - 5 + 4 \times 0,8^n = 4 \times 0,8^n (1 - 0,8) = 4 \times 0,8^n \times 0,2 > 0$

Pour tout  $n$ , on a démontré que  $u_{n+1} > u_n$  donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

•  $-1 < 0,8 < 1$  donc la suite géométrique  $(0,8^n)$  de raison 0,8 converge vers 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \times 0,8^n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 - 4 \times 0,8^n = 5$$

Donc la suite  $(u_n)$  est convergente vers 5.

On peut donc dire que si l'apiculteur rachète chaque année 10 000 abeilles, le nombre d'abeilles va augmenter chaque année et va tendre vers 50 000.

## Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.

On cherche à déterminer la valeur de  $c$  qui permet d'atteindre cet objectif.

On définit la suite  $(v_n)$  par, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_n - 5c$ ; donc, pour tout  $n$ ,  $u_n = v_n + 5c$ .

1. •  $v_{n+1} = u_{n+1} - 5c = 0,8u_n + c - 5c = 0,8(v_n + 5c) - 4c = 0,8v_n + 4c - 4c = 0,8v_n$

•  $v_0 = u_0 - 5c = 1 - 5c$

La suite  $(v_n)$  est donc géométrique de raison  $q = 0,8$  et de premier terme  $v_0 = 1 - 5c$ .

2. La suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,8$  et de premier terme  $v_0 = 1 - 5c$  donc, pour tout  $n$ ,

$$v_n = v_0 \times q^n = (1 - 5c) 0,8^n.$$

3. La suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $0,8$ ; or  $-1 < 0,8 < 1$  donc la suite  $(v_n)$  est convergente et a pour limite  $0$ .

Pour tout  $n$ ,  $u_n = v_n + 5c$  donc la suite  $(u_n)$  est convergente et a pour limite  $5c$ .

L'apiculteur veut que le nombre d'abeilles tende vers  $100\,000$ ; il faut donc que  $5c = 10$ , autrement dit que  $c = 2$ .

Pour que le nombre d'abeilles tende vers  $100\,000$ , il faut que l'apiculteur rachète chaque année  $20\,000$  abeilles.

### EXERCICE 5 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $u_n$  le nombre de fourmis, exprimé en milliers dans cette population au bout du  $n$ -ième jour.

Au début de l'étude la colonie compte  $5\,000$  fourmis et au bout d'un jour elle compte  $5\,100$  fourmis. Ainsi, on a  $u_0 = 5$  et  $u_1 = 5,1$ .

On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de  $10\%$  chaque jour. En d'autres termes, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9(u_{n+1} - u_n)$ .

1. D'après le texte,  $u_2 - u_1 = 0,9(u_1 - u_0)$  donc

$$u_2 = 0,9(5,1 - 5) + 5,1 = 0,9 \times 0,1 + 5,1 = 0,09 + 5,1 = 5,19$$

2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

a.  $u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9(u_{n+1} - u_n) \iff u_{n+2} = 0,9u_{n+1} - 0,9u_n + u_{n+1} \iff u_{n+2} = 1,9u_{n+1} - 0,9u_n$

On a :  $\begin{cases} u_{n+2} = 1,9u_{n+1} - 0,9u_n \\ u_{n+1} = u_{n+1} + 0 \times u_n \end{cases}$ , système qui s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \iff V_{n+1} = AV_n, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On admet alors que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_n = A^n V_0$ .

- b. On pose  $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . On admet que la matrice  $P$  est inversible. Avec la calculatrice, on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \times 1,9 + 10 \times 1 & -10 \times (-0,9) + 10 \times 0 \\ 10 \times 1,9 - 9 \times 1 & 10 \times (-0,9) - 9 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 10 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \times 0,9 + 9 \times 1 & -9 \times 1 + 9 \times 1 \\ 10 \times 0,9 - 9 \times 1 & 10 \times 1 - 9 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- c. Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

• **Initialisation**

On appelle  $I_2$  la matrice identité d'ordre  $2$  :  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$A^0 = I_2 \text{ et } D^0 = I_2 \text{ donc } PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$$

Donc la propriété  $\mathcal{P}_0$  est vérifiée.

- **Hérédité**

Soit  $n$  un entier naturel quelconque ; supposons que la propriété est vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire que  $A^n = PD^n P^{-1}$  (hypothèse de récurrence).

On veut démontrer que la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

$$A^{n+1} = A \times A^n = (PDP^{-1})(PD^n P^{-1}) = PD(P^{-1}P)D^n P^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}$$

La propriété est donc vraie au rang  $n + 1$ .

On a démontré que, pour tout  $n$ ,  $P_n \implies P_{n+1}$ .

La propriété est donc héréditaire à partir du rang 0.

- **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0 ; elle est héréditaire à partir du rang 0, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

On a donc démontré que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^n = PD^n P^{-1}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on admet que  $A^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0,9^{n+1} + 10 & 10 \times 0,9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0,9^n + 10 & 10 \times 0,9^n - 9 \end{pmatrix}$ .

d. Pour tout entier  $n$ , on a  $V^n = A^n V_0$  c'est-à-dire  $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \text{D'où : } u_n &= (-10 \times 0,9^n + 10) \times u_1 + (10 \times 0,9^n - 9) \times u_0 \\ &= (-10 \times 0,9^n + 10) \times 5,1 + (10 \times 0,9^n - 9) \times 5 \\ &= -52 \times 0,9^n + 51 + 50 \times 0,9^n - 45 \\ &= 6 - 0,9^n \end{aligned}$$

3. La taille de la colonie au bout du 10<sup>e</sup> jour est  $u_{10} = 6 - 0,9^{10} \approx 5,651$ .

Au bout du dixième jour, il y aura donc environ 5 651 fourmis.

4. Comme  $0 < 0,9 < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$ .

D'après les théorèmes sur les sommes de limite de suites, la suite  $(u_n)$  converge donc vers 6.

Le nombre de fourmis dans la colonie tendra 6000 individus.