

❧ Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane ❧ 16 juin 2017

EXERCICE 1

3 points

1. On a $1^4 + 2 \times 1^3 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$, donc 1 est solution de (E).
2. Soit $z \in \mathbb{C}$, alors :

$$(z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2 = z^4 + 2z^3 - z - 2.$$

3. D'après la question précédente, l'équation (E) équivaut à

$$z^2 + z - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 + z + 1 = 0$$

- l'équation $z^2 + z - 2 = 0$ est du second degré, à coefficients réels, son discriminant vaut $\Delta = 9$; elle possède donc deux solutions réelles qui sont -2 et 1 ;
 - l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ est du second degré, à coefficients réels, son discriminant vaut $\Delta = -3$, elle possède deux solutions complexes conjuguées qui sont $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - Les solutions de (E) sont donc : $-2, 1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. Notons :
 - A le point d'affixe $a = 1$,
 - B le point d'affixe $b = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
 - C le point d'affixe $c = -2$,
 - D le point d'affixe $d = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les nombres complexes b et d étant conjugués, la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (AC) (qui n'est rien d'autre que l'axe réel). Les diagonales du quadrilatère ABCD sont donc perpendiculaires.

De plus le milieu de [AC] a pour affixe $\frac{a+c}{2} = -\frac{1}{2}$ et le milieu de [BD] a pour affixe $\frac{b+d}{2} = \frac{b+\bar{b}}{2} = \frac{2\text{Re}(b)}{2} = -\frac{1}{2}$. Les diagonales [AC] et [BD] se coupent donc en leur milieu. On peut alors conclure que le quadrilatère ABCD est un losange.

EXERCICE 2

4 points

Commun à tous les candidats

1. a. La courbe de la fonction de densité est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$. Or $22,8 = \mu - 2,2$ et $27,2 = \mu + 2,2$.
On en déduit donc, par symétrie, que $P(X \leq 22,8) = P(X \geq 27,2) = 0,023$ et donc que

$$P(22,8 \leq X \leq 27,2) = 1 - 2 \times 0,023 = 0,954.$$

La probabilité qu'une pièce soit conforme est donc de 0,954.

- b. D'après le cours, on sait que lorsque X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ_1 on a $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,954$.
En comparant avec le résultat de la question 1, on peut donc en déduire que $2\sigma_1 = 2,2$ d'où $\sigma_1 = 1,1$.
- c. On a, à 10^{-3} près :

$$\begin{aligned} P_{(22,8 \leq X \leq 27,2)}(X \leq 24) &= \frac{P((X \leq 24) \cap (22,8 \leq X \leq 27,2))}{P(22,8 \leq X \leq 27,2)} \\ &= \frac{P(22,8 \leq X \leq 24)}{P(22,8 \leq X \leq 27,2)} \\ &= \frac{0,1589}{0,954} \\ &= 0,167. \end{aligned}$$

2. a. À espérance μ égale, les courbes de Gauss à écart-type « petit » sont plus regroupées autour de μ . Comme avec le deuxième procédé de nickelage la probabilité qu'une pièce soit conforme est supérieure à celle du premier procédé, on peut penser que $\sigma_2 < \sigma_1$. On peut retrouver ce résultat par un calcul, en centrant et en réduisant :

$$22,8 \leq Y \leq 27,2 \iff -\frac{2,2}{\sigma_2} \leq \frac{Y - \mu}{\sigma_2} \leq \frac{2,2}{\sigma_2}$$

Notons $Z = \frac{Y - \mu}{\sigma_2}$, alors Z suit la loi normale centrée réduite. En notant Φ la fonction de répartition de cette loi, on a alors $\Phi\left(\frac{2,2}{\sigma_2}\right) - \Phi\left(-\frac{2,2}{\sigma_2}\right) = 0,98$, ce qui équivaut, pour des raisons de symétrie, à $2\Phi\left(\frac{2,2}{\sigma_2}\right) - 1 = 0,98$, c'est-à-dire à $\Phi\left(\frac{2,2}{\sigma_2}\right) = 0,99$.

À l'aide de la fonction `fracNormale` de la calculatrice, on obtient alors que $\frac{2,2}{\sigma_2} = 2,326$, d'où $\sigma_2 = 0,946$. On a donc bien $\sigma_2 < \sigma_1$.

- b. Avec les notations usuelles du cours, on a $n = 500$ et $p = 0,98$. Les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$ sont respectées, on peut donc utiliser l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

À l'aide de la calculatrice, on a $I = [0,967 ; 0,993]$. Notons f la fréquence observée de pièces conformes dans l'échantillon, alors $f = \frac{550 - 15}{500} = 0,97$. On a donc $f \in I$ et il n'y a pas lieu de rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs.

EXERCICE 3

3 points

Commun à tous les candidats

1. • La tangente en M à \mathcal{C}_f a pour coefficient directeur $f'(a) = e^a$, et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1 ; e^a)$.
• La tangente en N à \mathcal{C}_g a pour coefficient directeur $g'(a) = -e^{-a}$, et a pour vecteur directeur $\vec{v}(1 ; -e^{-a})$.

On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + e^a \times (-e^{-a}) = 1 - e^{a-a} = 1 - 1 = 0$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux, donc les deux droites sont perpendiculaires.

2. a. On peut conjecturer que, pour tout réel a , $PQ = 2$.
b. • **Détermination de P.** La tangente en M à \mathcal{C}_f a pour équation :

$$y = e^a(x - a) + e^a.$$

P est un point de cette droite, d'ordonnée 0 et d'abscisse x_P , on a donc :

$$0 = e^a(x_P - a) + e^a \iff e^a(x_P - a) = -e^a \iff x_P - a = -1 \iff x_P = a - 1.$$

Ainsi le point P a pour coordonnées $P(a - 1 ; 0)$.

- **Détermination de Q.** La tangente en N à \mathcal{C}_g a pour équation :

$$y = -e^{-a}(x - a) + e^{-a}.$$

Q est un point de cette droite, d'ordonnée 0 et d'abscisse x_Q , on a donc :

$$0 = -e^{-a}(x_Q - a) + e^{-a} \iff e^{-a}(x_Q - a) = e^{-a} \iff x_Q - a = 1 \iff x_Q = a + 1.$$

Ainsi le point Q a pour coordonnées $Q(a + 1 ; 0)$.

- **Calcul de PQ.** Les points P et Q étant situés sur l'axe des abscisses, la distance entre ces deux points est donnée par :

$$PQ = |x_P - x_Q| = |(a - 1) - (a + 1)| = |a - 1 - a - 1| = |-2| = 2.$$

La conjecture est démontrée.

EXERCICE 4
Commun à tous les candidats

5 points

Partie A

1. Pour tout réel $x \in]0 ; +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$. Comme $x^2 > 0$, $f'(x)$ a donc le même signe que $1 - \ln(x)$. Or :

$$1 - \ln(x) \geq 0 \iff 1 \geq \ln(x) \iff e \geq x$$

Par ailleurs on a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée), $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (par crois-

sance comparée) et $f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$.

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

Remarque : les limites n'étaient pas exigées dans l'énoncé.

2. D'après le tableau de variation précédent, la fonction f a pour maximum $\frac{1}{e}$ et ce maximum est atteint en $x = e$.

Partie B

1. Soit n un entier tel que $n \geq 3$, alors $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} \leq \frac{1}{e}$.
Sur l'intervalle $[1 ; e]$, la fonction f est continue (car dérivable), et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $[1 ; e]$ sur $[f(1) ; \frac{1}{e}] = [0 ; \frac{1}{e}]$.
Le nombre $\frac{1}{n}$ appartient à l'intervalle $[0 ; \frac{1}{e}]$, donc l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution α_n dans $[1 ; e]$.
2. a. Les abscisses inférieures à e des points d'intersection entre les droite D_3, D_4, D_5 et la courbe \mathcal{C} sont les nombre α_3, α_4 et α_5 . Graphiquement, on lit que $\alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5$, il semble donc que la suite (α_n) soit décroissante.
- b. Soit n un entier tel que $n \geq 3$. Par définition de la suite (α_n) , on a $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$. Comme $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, on a donc $f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n)$.
Supposons que $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$, alors, la fonction f étant croissante sur $[1 ; e]$, cela entraînerait que $f(\alpha_n) \leq f(\alpha_{n+1})$, ce qui est faux. Par conséquent, pour tout entier $n \geq 3$, on a $\alpha_n > \alpha_{n+1}$, ce qui prouve que la suite (α_n) est décroissante.
- c. La suite (α_n) est décroissante, minorée (par 1), elle est donc convergente.
3. a. Soit n un entier tel que $n \geq 3$. Par définition de β_n , on a :

$$f(\beta_n) = \frac{1}{n} \iff \frac{\ln(\beta_n)}{\beta_n} = \frac{1}{n} \iff \ln(\beta_n) = \frac{\beta_n}{n}.$$

La suite (β_n) est croissante, donc, pour tout entier naturel $n \geq 3$ on a $\beta_n \geq \beta_3 > 0$. La fonction \ln étant croissante sur $]0 ; +\infty[$, ceci implique que $\ln(\beta_n) \geq \ln(\beta_3)$, c'est-à-dire que $\frac{\beta_n}{n} \geq \frac{\beta_3}{3}$. On en déduit bien que $\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}$.

- b. $\beta_3 > 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{\beta_3}{3} = +\infty$.

Par comparaison à l'infini, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = +\infty$.

EXERCICE 5

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont donc pas alignés. Ils définissent bien un plan (ABC).

b. On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 0 + 0 \times (-1) + 4 \times 1 = 4$,

c. D'autre part :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = \sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2} \times \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} \times \cos(\widehat{BAC}) = \sqrt{40} \cos(\widehat{BAC}).$$

On en déduit que $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{4}{\sqrt{40}}$. À l'aide de la calculatrice : $\widehat{BAC} \approx 50,8^\circ$.

2. a. Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont non nuls et non colinéaires. Ils forment donc une base du plan (ABC). De plus
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 2 + (-1) \times 0 + (-1) \times 4 = 4 - 4 = 0$, donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$
 - $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 0 + (-1) \times (-1) + (-1) \times 1 = 1 - 1 = 0$, donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$
- Le vecteur \vec{n} est donc un vecteur normal au plan (ABC).
- b. Une équation cartésienne de (ABC) est alors de la forme $2x - y - z + d = 0$. Le point $A(-1; 2; 0)$ appartient à ce plan donc $-2 - 2 = d = 0$ d'où $d = 4$. Une équation cartésienne de (ABC) est donc $2x - y - z + 4 = 0$.

3. a. Un vecteur directeur du plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$ est $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ce vecteur est également un vecteur normal au plan \mathcal{P}_2 puisque ces deux plans sont parallèles. Une équation cartésienne de \mathcal{P}_2 est donc : $x - 2z + d = 0$. Et comme $O(0; 0; 0) \in \mathcal{P}_2$ cela conduit à $d = 0$. Une équation cartésienne de \mathcal{P}_2 est donc $x - 2z = 0 \iff x = 2z$.

- b. Le plan \mathcal{P}_1 a pour vecteur directeur $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ce vecteur n'est pas colinéaire à \vec{n}_2 , par conséquent les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 ne sont ni parallèles ni confondus : ils sont sécants.

- c. • Pour tout réel t , on a $3(2t) + (-4t - 3) - 2t + 3 = 6t - 4t - 3 - 2t + 3 = 0$ donc la droite \mathcal{D} est incluse dans le plan \mathcal{P}_1 .
- Pour tout réel t , on a $(2t) - 2(t) = 0$, donc la droite \mathcal{D} est incluse dans le plan \mathcal{P}_2 . Ces deux plans étant sécants selon une droite, cette droite n'est autre que la droite \mathcal{D} .

4. Soit M un point de \mathcal{D} , alors il existe un réel t tel que $M(2t; -4t - 3; t)$. D'où :

$$M \in (ABC) \iff 2(2t) - (-4t - 3) - t + 4 = 0 \iff 7t + 7 = 0 \iff t = -1$$

La droite \mathcal{D} et le plan (ABC) n'ont donc qu'un seul point commun, obtenu pour $t = -1$, c'est le point $I(-2; 1; -1)$.

EXERCICE 5

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n = 9 \times 2^n - 6$ ». Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n .
- **Initialisation.** On a $u_0 = 3$ et $9 \times 2^0 - 6 = 9 - 6 = 3$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité.** Supposons que, pour un entier naturel n , $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $u_n = 9 \times 2^n - 6$, donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n + 6 \\ &= 2(9 \times 2^n - 6) + 6 \\ &= 9 \times 2 \times 2^n - 12 + 6 \\ &= 9 \times 2^{n+1} - 6 \end{aligned}$$

et la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie. La propriété est héréditaire.

- **Conclusion.** La propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n supérieur ou égal à zéro, elle est vraie au rang $n+1$.

D'après le principe de la récurrence, pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. 3 divise 9, 2 divise 2^n , 2 et 3 sont premiers entre eux, donc $2 \times 3 = 6$ divise 9×2^n . Il est par ailleurs clair que 6 divise -6 donc 6 divise la combinaison $9 \times 2^n - 6$. En d'autres termes, 6 divise u_n .
- L'affirmation est fausse. En effet on a $v_6 = \frac{u_6}{6} = \frac{9 \times 2^6 - 6}{6} = \frac{570}{6} = 95$ qui n'est pas un nombre premier.
- a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$v_{n+1} - 2v_n = \frac{9 \times 2^{n+1} - 6}{6} - 2 \times \frac{9 \times 2^n - 6}{6} = \frac{9 \times 2^{n+1} - 6 + 9 \times 2^{n+1} + 12}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la relation précédente, il existe deux entiers a et b tels que $av_n + bv_{n+1} = 1$. Le théorème de Bézout permet alors de conclure que v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

- c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = 6v_n$, $u_{n+1} = 6v_{n+1}$. De plus v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux. On peut alors conclure que $\text{PGCD}(u_n, u_{n+1}) = 6$.
- a. On a $2^4 = 16 = 3 \times 5 + 1$ donc $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$.
- b. Soit $k \in \mathbb{N}$, et $n = 4k + 2$, alors :

$$u_n = 9 \times 2^{4k+2} - 6 = 9 \times (2^4)^k \times 2^2 - 6.$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} u_n &\equiv 9 \times 1^k \times 4 - 6 \pmod{5} \\ &\equiv 4 \times 1 \times 4 - 6 \pmod{5} \\ &\equiv 15 \pmod{5} \\ &\equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

Le nombre u_n est alors divisible par 5.

- c. Le nombre u_n n'est pas divisible par 5 pour les autres valeurs de n , en effet on a $u_0 = 3$ comme contre-exemple immédiat.