

✧ **Corrigé du baccalauréat TS Métropole–La Réunion** ✧
22 juin 2018

EXERCICE 1

1. La largeur de l'arc de chaînette est égal à $2x$ et sa hauteur est égale à $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$.

Le problème étudié revient à résoudre l'équation $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) = 2x$

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) = 2x \iff e^x + e^{-x} - 2 = 4x \iff e^x + e^{-x} - 2 - 4x = 0$$

2. a. Pour $x > 0$, $x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) = \cancel{x} \times \frac{e^x}{\cancel{x}} - 4x = e^x - 4$ donc $f(x)$ peut bien s'écrire sous la forme proposée.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissance comparée, donc par somme puis produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Par somme, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3. a. $f'(x) = e^x - e^{-x} - 4$

b. $f'(x) = 0 \iff e^x - \frac{1}{e^x} - 4 = 0 \iff \frac{(e^x)^2 - 4e^x - 1}{e^x} = 0 \iff (e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0.$

c. Si on pose $X = e^x$ alors $(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0 \iff X^2 - 4X - 1 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \times 1 \times (-1) = 16 + 4 = 20 > 0$ donc l'équation admet deux solutions :

$$X_1 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5} \approx -0,24 < 0 \text{ et } X_2 = 2 + \sqrt{5} \approx 4,24 > 0$$

$e^x = 2 - \sqrt{5}$ n'a pas de solution car $e^x > 0$ et $e^x = 2 + \sqrt{5} \iff x = \ln(2 + \sqrt{5})$.

Donc $f'(x)$ s'annule pour une seule valeur égale à $\ln(2 + \sqrt{5})$

4. a. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$\ln(2 + \sqrt{5})$	$+\infty$
$f(x)$	0	$f(\ln(2 + \sqrt{5}))$	$+\infty$

avec $f(0) = 1 + 1 - 0 - 2 = 0$

et $f(\ln(2 + \sqrt{5})) \approx -3,3$

b. — Sur $]0; \ln(2 + \sqrt{5})]$, $f(x) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

— Sur $[\ln(2 + \sqrt{5}); +\infty[$, f est continue et strictement croissante.

$$0 \in \left[f(\ln(2 + \sqrt{5})); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[\text{ car } f(\ln(2 + \sqrt{5})) \approx -3,3 < 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution α .

5. a.

m	a	b	$b - a$	$f(m)$
	2	3	1	
2,5	2	2,5	$0,5 > 0,1$	$\approx 0,26 > 0$
2,25	2,25	2,5	$0,25 > 0,1$	$\approx -1,4 < 0$
2,375	2,375	2,5	$0,125 > 0,1$	$\approx -0,66 < 0$
2,4375	2,4375	2,5	$0,0625 < 0,1$	$\approx -0,22 < 0$

b. Grâce à cet algorithme, on obtient un encadrement de α : $2,4375 < \alpha < 2,5$

6. $e^{\frac{t}{39}} + e^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0 \iff e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$ avec $x = \frac{t}{39}$

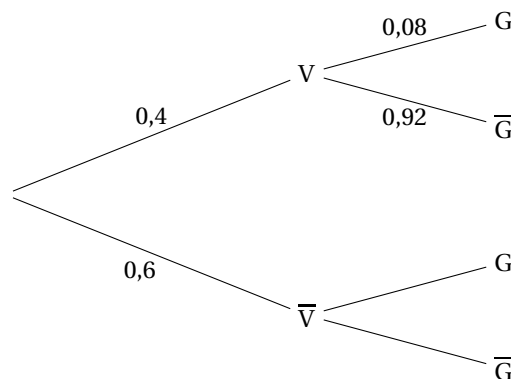
Cette équation a une unique solution α et $\alpha = \frac{t}{39} \iff t = 39\alpha$ donc la hauteur de l'arche est $2t = 78\alpha$

$$2,4375 < \alpha < 2,5 \iff 190,125 < 78\alpha < 195$$

donc la hauteur de l'arche est comprise entre 190 et 195 mètres.

EXERCICE 2**Partie A**1. a. $P(G) = 0,2$ car 20% de la population a contracté la grippe.

b. On obtient :

2. On calcule $P(G \cap V) = 0,4 \times 0,08 = 0,032$ soit 3,2% de chances que la personne ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. On calcule $P_{\bar{V}}(G) = \frac{P(\bar{V} \cap G)}{P(\bar{V})}$

D'après la formule des probabilités totales, $P(V \cap G) + P(\bar{V} \cap G) = P(G)$

$$\text{donc } P(\bar{V} \cap G) = P(G) - P(V \cap G) = 0,2 - 0,032 = 0,168 \text{ puis } P_{\bar{V}}(G) = \frac{0,168}{0,6} = 0,28.$$

Partie B1. Il s'agit de n expériences aléatoires identiques et indépendantes à 2 issues (la personne est vaccinée ou non) avec une probabilité de succès de 0,4.La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; 0,4)$.2. Avec la loi $\mathcal{B}(40 ; 0,4)$ a. $P(X = 15) \approx 0,123$

- b. $P(X \geq 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - P(X \leq 19) \approx 0,130$
3. On calcule $P(1450 < X < 1550) = P\left(\frac{1450 - 1500}{30} < Z < \frac{1550 - 1500}{30}\right) = P\left(-\frac{5}{3} < Z < \frac{5}{3}\right) \approx 0,904$

EXERCICE 3**Partie A**

1. a. $(EA) \perp (ABC)$ donc (EA) est la hauteur issue de E dans le tétraèdre ABCE.
 $(CB) \perp (ABE)$ donc (CB) est la hauteur issue de C dans le tétraèdre ABCE.
- b. Les droites (EA) et (BC) sont non coplanaires donc non sécantes.
 Avec deux hauteurs non sécantes, il est impossible d'avoir 4 hauteurs concourantes!
2. a. $x - y + z = 0$ est bien l'équation cartésienne d'un plan donc je vérifie que les points A, C et H appartiennent bien à ce plan :
 $A(0; 0; 0)$ donc $x_A - y_A + z_A = 0$
 $C(1; 1; 0)$ donc $x_C - y_C + z_C = 1 - 1 - 0 = 0$
 $H(0; 1; 1)$ donc $x_H - y_H + z_H = 0 - 1 + 1 = 0$
- b. $F(1; 0; 1)$ et $D(0; 1; 0)$ donc $\overrightarrow{DF}(1; -1; 1)$ qui est bien un vecteur normal au plan d'après les coefficients de l'équation cartésienne donc $(FD) \perp (ACH)$ puis (FD) est bien la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF.
- c. Par analogie, on en déduit que (AG) est la hauteur issue de A, (CE) est la hauteur issue de H et (HB) est la hauteur issue de H.
 D'après l'énoncé, les 4 hauteurs correspondent aux « grandes diagonales » du cube et sont donc concourantes.

Partie B

1. a. (MK) est orthogonale au plan (NPQ) donc d'après le théorème de la porte, (MK) est orthogonale à toute droite de ce plan; en particulier, $(MK) \perp (PQ)$.
- b. On a montré que (PQ) est orthogonale à (NK) et (MK) qui sont deux droites sécantes du plan (MNK) donc par définition, (PQ) est orthogonale au plan (MNK) .
2. (PQ) est orthogonale au plan (MNK) donc d'après le théorème de la porte, (PQ) est orthogonale à toute droite de ce plan; en particulier, $(PQ) \perp (MN)$.

Partie C

$$\overrightarrow{RS}(4; -1; -4) \quad \overrightarrow{ST}(3; -5; 7) \quad \overrightarrow{TU}(0; 8; -2) \quad \overrightarrow{RU}(7; 2; 1) \quad \overrightarrow{RT}(7; -6; 3) \quad \overrightarrow{SU}(3; 3; 5)$$

$$\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{RU} = 3 \times 7 + (-5) \times 2 + 7 \times 1 = 21 - 10 + 7 \neq 0 \text{ donc } (ST) \text{ n'est pas orthogonale à } (TU).$$

Avec deux arêtes opposées non orthogonales, ce tétraèdre n'est pas orthocentrique.

EXERCICE 4 OBLIGATOIRE

1. a. $\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{4}$

b. $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 8$ donc $z_1 = 4\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 4\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}} = 6 e^{-i\frac{2\pi}{6}}$$
 donc $z_2 = 6 e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 6 e^{-i\frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{3} e^{-i\frac{3\pi}{6}}$$
 donc $z_3 = 3\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$\arg(z_3) = \frac{-\pi}{2} \text{ donc } z_3 \text{ est un imaginaire pur dont la partie imaginaire est négative et}$$

$$\text{Im}(z_3) = -3\sqrt{3}$$

c. FIGURE

2. a. *Initialisation* $z_0 = 8 \times 1 \times 1 = 8$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : On suppose que pour $n \geq 0$, $z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}$ et on va montrer que

$$z_{n+1} = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{6}}$$

On a $z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} z_n = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}$ (par hypothèse de récurrence).

Donc $z_{n+1} = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{6}}$ (en utilisant la propriété $a^n \times a = a^{n+1}$ pour tout nombre réel a).

Donc la propriété est héréditaire.

La propriété est vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang $n \geq 0$, elle l'est aussi au rang $n+1$

Conclusion : d'après le principe de récurrence la propriété est vraie pour tout entier naturel n .

b. On a donc $u_n = |z_n| = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 8 \times 0 = 0$

3. a. $\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = \frac{\frac{3-i\sqrt{3}}{4} z_k - z_k}{\frac{3-i\sqrt{3}}{4} z_k} = \frac{\cancel{z_k} \left(\frac{3-i\sqrt{3}}{4} - 1\right)}{\frac{3-i\sqrt{3}}{4} \cancel{z_k}} = \frac{\frac{3-i\sqrt{3}}{4} - 1}{\frac{3-i\sqrt{3}}{4}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{4} \times \frac{4}{3-i\sqrt{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$

On multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = \frac{(-1-i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})}{(3-i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})} = \frac{-3-i\sqrt{3}-3i\sqrt{3}+3}{9+3} = \frac{-4i\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{12 \times \sqrt{3}} = \frac{-12i}{12\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}i$$

On a donc $\left|\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}}\right| = \left|-\frac{1}{\sqrt{3}}i\right| \iff \frac{|z_{k+1} - z_k|}{|z_{k+1}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \frac{A_k A_{k+1}}{OA_{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff$

$$A_k A_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} OA_{k+1}.$$

b. D'après la question précédente, pour tout entier naturel k ,

$$A_k A_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} OA_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} |z_{k+1}| = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1} = \frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1}$$

$$\text{Donc } \ell_n = \frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1 + \frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dots + \frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \frac{8}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$\text{Puis } \ell_n = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{2 - \sqrt{3}} \times \left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$$

$$\text{Pour finir, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = \frac{8}{2 - \sqrt{3}}(1 - 0) = \frac{8}{2 - \sqrt{3}} \approx 29,86$$

EXERCICE 4 SPÉCIALITÉ

Partie A

$$x^2 - 8y^2 = 1. \quad (\text{E})$$

1. Le couple (1; 0) est solution; avec $y = 1$, on trouve aussitôt $x = 3$.
Le couple (3; 1) est aussi solution.

2.

$$x_0 = 1, y_0 = 0, \text{ et pour tout entier naturel } n, \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

a. Initialisation

On a vu que le couple $(x_0 = 1; y_0 = 0)$ est un couple solution. Donc la proposition est vraie au rang 0.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que le couple $(x_n; y_n)$ est solution de l'équation (E), c'est-à-dire que $x_n^2 - 8y_n^2 = 1$.

$$\text{Alors } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n + 8y_n \\ x_n + 3y_n \end{pmatrix}$$

Donc $x_{n+1} = 3x_n + 8y_n$ et $y_{n+1} = x_n + 3y_n$.

Calculons la différence :

$$x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = (3x_n + 8y_n)^2 - 8(x_n + 3y_n)^2 = 9x_n^2 + 48x_n y_n + 64y_n^2 - 8(x_n^2 + 6x_n y_n + 9y_n^2) = 9x_n^2 + 64y_n^2 + 48x_n y_n - 8x_n^2 - 72y_n^2 - 48x_n y_n = x_n^2 - 8y_n^2 = 1, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.}$$

Le couple $(x_{n+1}; y_{n+1})$ est aussi un couple solution.

On a montré que la proposition est vraie au rang 0 et que si elle est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence on a montré que pour tout naturel n , le couple $(x_n; y_n)$ est une solution de (E).

b. On calcule la différence :

$x_{n+1} - x_n = 3x_n + 8y_n - x_n = 2x_n + 8y_n$; cette somme est positive car on suppose que $x_n > 0$ et $y_n \in \mathbb{N}, y_n \geq 0$.

On a donc $x_{n+1} - x_n > 0 \iff x_{n+1} > x_n$: la suite (x_n) est donc strictement croissante.

3. On a vu qu'il existe au moins un couple $(x_0; y_0)$ solution de (E) et on a démontré que pour chaque couple solution $(x_n; y_n)$ le couple $(x_{n+1}; y_{n+1})$ est aussi solution; comme on a montré que $x_{n+1} > x_n$ le couple $(x_{n+1}; y_{n+1})$ est une solution différente.

Conclusion : l'équation (E) a une infinité de solutions, les premiers termes étant de plus en plus grands. Les premiers couples sont (1;0), (3; 1), (17; 6), ...

Partie B

Un entier naturel n est appelé un nombre puissant lorsque, pour tout diviseur premier p de n , p^2 divise n . En d'autres termes, un entier naturel n est puissant s'il est divisible par p^2 , **pour tout** diviseur premier p de n .

1. • On a $8 = 2^3$; l'unique diviseur premier de 8 est 2, 8 est divisible par 2^2 , 8 est donc puissant ;
 • On a $9 = 3^2$; l'unique diviseur premier de 9 est 3, 9 est divisible par 3^2 , 9 est donc puissant ;
 8 et 9 sont deux naturels consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

Remarque : 12, qui est divisible par 2 et 2^2 , n'est pas puissant. En effet 3 est un diviseur premier de 12 et $3^2 = 9$ ne divise pas 12.

2. On suppose que $ab \neq 0$, que $a \neq b$ et $a > 1$.

Tout diviseur premier de n est un diviseur de a ou de b

• Si p est un diviseur premier de a , alors il existe $a' \in \mathbb{N}$ tel que $a = p \times a'$, donc n s'écrit $n = p^2 a'^2 b^3$, donc p^2 divise n ;

• Si p est un diviseur premier de b , alors il existe $b' \in \mathbb{N}$ tel que $b = p \times b'$, donc n s'écrit $n = a^2 p^3 (b')^3 = p^2 p a^2 (b')^3$, donc p^2 divise n .

Conclusion n est puissant.

3. • Il est évident que $x^2 - 1$ précède x^2 ; les deux nombres sont consécutifs ;

• Puisque $(x ; y)$ est un couple solution de l'équation (E), on a donc $x^2 - 8y^2 = 1 \iff x^2 - 1 = 8y^2$ qui est un nombre puissant : en effet, il est de la forme $a^2 b^3$ avec $a = x$ et $b = 2$. De même $x^2 = x^2 \times 1^3$, x^2 est donc également puissant.

Conclusion : si $(x ; y)$ est un couple solution de l'équation (E), $x^2 - 1$ et x^2 sont deux naturels consécutifs puissants.

On a vu que 8 et 9 sont consécutifs et puissants.

4. On a vu l'équation (E) a une infinité de couples solutions.

On a démontré que pour chaque couple $(x ; y)$ solution de (E), les nombres $x^2 - 1$ et x^2 sont consécutifs et puissants et que la suite des premiers termes est strictement croissante.

Il existe donc une infinité de naturels consécutifs et puissants.

La calculatrice donne $(x_3 ; y_3) = (99 ; 35)$.

On a $99^2 = (100 - 1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$ et $99^2 - 1 = 9800$.

$9801 = (9 \times 11)^2 = (3^2 \times 11)^2 = 3^4 \times 11^2$.

9801 est effectivement divisible par 3 et par 3^2 , par 11 et 11^2 ;

$9801 - 1 = 9800 = 98 \times 100 = 2 \times 49 \times (2 \times 5)^2 = 2^3 \times 7^2 \times 5^2$ est divisible par 2 et par 2^2 , par 5 et 5^2 par 7 et 7^2 .

9800 et 9801 sont des naturels consécutifs et puissants supérieurs à 2018.