

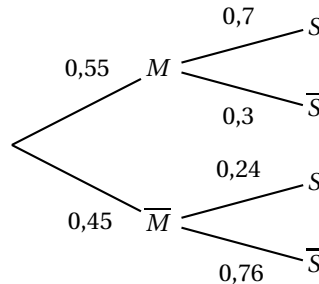
✎ Corrigé du Baccalauréat S Antilles-Guyane 9 septembre 2020 ✎

EXERCICE 1

6 points

Partie A

1. On traduit cette situation à l'aide de l'arbre pondéré suivant :



2. En utilisant l'arbre pondéré précédent, on obtient :

$$P(M \cap S) = 0,55 \times 0,7 \approx 0,385.$$

La probabilité que Louise emmène Zoé le matin et qu'elle la ramène le soir est à peu près égale à 0,385.

3. $P(S) = P(M \cap S) + P(M \cap \bar{S}) = 0,385 + 0,45 \times 0,24 \approx 0,493.$

4. Il s'agit de calculer $P_S(M).$

$$P_S(M) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{0,385}{0,493} \approx 0,781.$$

Partie B

X qui suit la loi normale d'espérance 28 et d'écart-type 5.

En utilisant la calculatrice, on obtient les résultats suivants :

1. $P(X \leq 25) \approx 0,274.$

2. $P(18 \leq X \leq 38) \approx 0,954.$

3. $P(X \geq d) = 0,1$, on obtient $d \approx 34.$

La durée du trajet (arrondie à la minute), telle que $P(X \geq d) = 0,1$ est de 34 minutes.

4. Y suit la loi normale d'espérance 26 et d'écart-type σ alors $Z = \frac{Y-26}{\sigma}$ suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart type 1.

On sait que $P(Y \geq 30) = 0,1.$

$$P(Y \geq 30) = 0,1 \iff P(Y - 26 \geq 30 - 26) = 0,1 \iff P\left(\frac{Y-26}{\sigma} \geq \frac{4}{\sigma}\right) = 0,1 \iff P\left(Z \geq \frac{4}{\sigma}\right) = 0,1$$

À l'aide de la calculatrice on trouve $\frac{4}{\sigma} \approx 1,281$ d'où $\sigma \approx \frac{4}{1,281} \approx 3,12$

Partie C

Ici on interroge $N = 254$ salariés de manière indépendante.

La proportion annoncée des salariés pratiquant le covoiturage est $p = 0,35.$

On a $n \geq 30$, $Np = 88,9 \geq 5$ et $n(1-p) = 165,1 \geq 5.$

On peut donc établir un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

$$I_N = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}} \right].$$

Or $p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}} \approx 0,291$ et $p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}} \approx 0,409$ donc $I_N = [0,291 ; 0,409].$

La fréquence observée est $f = \frac{82}{254} \approx 0,323 \in I_N.$

Ce sondage ne remet pas en cause l'information publiée par l'entreprise sur son site internet.

EXERCICE 2**6 points****Commun à tous les candidats****Partie A**

La fonction g est définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 1 - e^{-x}$.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} = 1$

2. $g(x) = 1 - e^{-x}$ donc $g'(x) = e^{-x}$

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc $g'(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$.

La fonction g est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Partie B

1. a. $f(x) = (x-1)e^{-kx} + 1$.

$$u(x) = x - 1$$

$$v(x) = e^{-kx}$$

$$u'(x) = 1$$

$$v'(x) = -ke^{-kx}$$

$$f = uv + 1 \text{ et } (uv)' = u'v + uv'$$

$$f'(x) = 1 \times e^{-kx} + (x-1) \times (-ke^{-kx}) + 0 = e^{-kx}(1 + (x-1)(-k)) = e^{-kx}(1 - kx + k) = e^{-kx}(-kx + k + 1)$$

b. La tangente T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

$$\text{or } f(1) = 1 \text{ et } f'(1) = e^{-k}$$

$$\text{Donc } T \text{ a pour équation } y = e^{-k}(x-1) + 1 = e^{-k}x - e^{-k} + 1$$

$$B \text{ est le point de } T \text{ d'abscisse } 0, \text{ donc } y_B = -e^{-k} + 1 = g(k)$$

2. D'après le tableau de variation de la fonction g de la partie A, pour tout réel positif k , $g(k) \in [0; 1]$.

Le point B ayant pour coordonnées $(0; g(k))$ avec $0 \leq g(k) \leq 1$, il appartient bien au segment $[OJ]$.

Partie C

La fonction h est définie sur \mathbb{R} par $h(x) = (x-1)e^{-2x} + 1$.

1. Voir ANNEXE 1. Sur l'intervalle $[0; 1]$: la courbe \mathcal{C}_h est au-dessus de la droite d d'équation $y = x$ donc

$$h(x) \geq x,$$

\mathcal{D} est le domaine du plan délimité par la courbe \mathcal{C}_h et la droite d . \mathcal{A} est l'aire de \mathcal{D} exprimée en unité d'aire, donc

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (h(x) - x) dx.$$

2. a. $h(x) - x = (x-1)e^{-2x} + 1 - x = -(1-x)e^{-2x} + (1-x) = (1-x)(-e^{-2x} + 1) = (1-x)(1 - e^{-2x})$.

b. On admet que, pour tout réel x , $e^{-2x} \geq 1 - 2x$.

$$e^{-2x} \geq 1 - 2x \iff -e^{-2x} \leq 2x - 1 \iff 1 - e^{-2x} \leq 1 + 2x - 1 \iff 1 - e^{-2x} \leq 2x$$

Sur $[0; 1]$, $x \leq 1$ donc $1 - x \geq 0$ d'où

$$1 - e^{-2x} \leq 2x \iff (1-x)(1 - e^{-2x}) \leq (1-x)2x \iff h(x) - x \leq 2x - 2x^2$$

c. $h(x) - x \leq 2x - 2x^2$ donc $\int_0^1 (h(x) - x) dx \leq \int_0^1 (2x - 2x^2) dx$.

$$\int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{on obtient donc } \mathcal{A} \leq \frac{1}{3}.$$

3. $\mathcal{A} = \int_0^1 (h(x) - x) dx = \left[H(x) - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = H(1) - \frac{1}{2} - H(0) = \frac{1}{4}(1-2)e^{-2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4}e^0 = -\frac{1}{4}e^{-2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}$

EXERCICE 3**4 points****Commun à tous les candidats**On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. $H(0; 1; 1)$, $M(0,5; 0; 0)$ et $N(1; 0,5; 0)$.
2. a. La droite (MN) est définie par le point M et le vecteur \overrightarrow{MN} .

$$M(0,5; 0; 0) \text{ et } \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une représentation paramétrique de la droite (MN) est donc :

$$\begin{cases} x = 0,5 + 0,5k \\ y = 0,5k \\ z = 0 \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

- b. Une représentation paramétrique de la droite (CD) est

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

K étant le point d'intersection des droites (CD) et (MN), ses coordonnées sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \\ x = 0,5 + 0,5k \\ y = 0,5k \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0,5k \\ t = 0,5 + 0,5k \\ x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ t = 1,5 \\ x = 1,5 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

C'est pourquoi $K(1,5; 1; 0)$

3. a. $\overrightarrow{HM} \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HN} \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

\overrightarrow{HM} et \overrightarrow{HN} ne sont pas colinéaires car $\frac{1}{0,5} \neq \frac{-0,5}{-1}$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = 2 \times 0,5 - 2 \times (-1) + 3 \times (-1) = 1 + 2 - 3 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{HN} = 2 \times 1 - 2 \times (-0,5) + 3 \times (-1) = 2 + 1 - 3 = 0$$

Le vecteur \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMN), c'est donc un vecteur normal à ce plan.

- b. $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ étant un vecteur normal du plan (HMN),

une équation cartésienne de ce plan est $2x - 2y + 3z + d = 0$, $H(0; 1; 1)$ appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, on a donc $2 \times 0 - 2 \times 1 + 3 \times 1 + d = 0$ soit $d = -1$

Une équation du plan (HMN) est donc $2x - 2y + 3z - 1 = 0$

- c. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (CG). Cette droite est déterminée par le point

$$C(1; 1; 0) \text{ et } \overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une représentation paramétrique de la droite (MN) est donc :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = p \end{cases}, p \in \mathbb{R}.$$

L est le point d'intersection de la droite (CG) et du plan (HMN), ses coordonnées sont donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ x = 1 \\ y = 1 \\ z = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2 + 3p - 1 = 0 \\ x = 1 \\ y = 1 \\ z = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{3} \\ x = 1 \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

C'est pourquoi L $(1 ; 1 ; \frac{1}{3})$

4. Sur la face (ABCD), on trace le segment [MN],
sur la face (BCGF), on trace le segment [NL],
sur la face (CDHG), on trace le segment [LH],

Les faces (ABFE) et (CDHG) sont parallèles donc les droites d'intersection des ces deux plans avec le plan (HMN) sont parallèles. On trace la parallèle à (LH) passant par M, elle coupe la droite (AE) en un point S.

Sur la face (ADHE), on trace le segment [SH], (on peut remarquer que (SH) est parallèle à (NL)).

La section du cube par le plan (HMN) est donc MNLHS.

Voir ANNEXE 2.

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 1$ et $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

$$\begin{array}{ll} u_0 = 4 & v_0 = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \\ u_1 = -\frac{2}{3} \times 4 + 1 = -\frac{8}{3} + 1 = -\frac{5}{3} & v_1 = -\frac{5}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{7}{3} \\ u_2 = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{5}{3}\right) + 1 = \frac{10}{9} + 1 = \frac{19}{9} & v_2 = \frac{19}{9} - \frac{2}{3} = \frac{13}{9} \\ \frac{v_1}{v_0} = \frac{-\frac{7}{3}}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{3} \times \frac{3}{10} = -\frac{7}{10} & \frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{13}{9}}{-\frac{7}{3}} = -\frac{13}{9} \times \frac{3}{7} = -\frac{13}{21} \end{array}$$

$\frac{v_1}{v_0} \neq \frac{v_2}{v_1}$, donc (v_n) n'est pas une suite géométrique. L'affirmation 1 est donc fausse.

2. Pour tout entier naturel n non nul, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

$$\Leftrightarrow 3 - 1 \leq 3 + \cos(n) \leq 3 + 1 \Leftrightarrow 2 \leq 3 + \cos(n) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{n^2} \leq \frac{3 + \cos(n)}{n^2} \leq \frac{4}{n^2}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2} = 0,$$

d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \cos(n)}{n^2} = 0$, l'affirmation 2 est donc vraie.

3. À la fin de l'exécution, la variable U contient la première valeur strictement supérieur à 5 000.

En effet l'algorithme ne s'arrête pas tant que $U \leq 5000$.

En utilisant la calculatrice, on obtient la valeur 6565.

L'affirmation 3 est donc fausse.

$$4. (z-i)(z^2 + z\sqrt{3} + 1) = 0. \iff (z-i) = 0 \text{ ou } (z^2 + z\sqrt{3} + 1) = 0$$

$$(z-i) = 0 \iff z = i$$

$$z^2 + z\sqrt{3} + 1 = 0 \quad \Delta = \sqrt{3}^2 - 4 \times 1 = -1 = i^2$$

Δ est un réel strictement négatif donc l'équation a pour solution deux nombres complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{-\sqrt{3}-i}{2} \text{ et } z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$$

$$\text{L'équation } (z-i)(z^2 + z\sqrt{3} + 1) = 0 \text{ a donc comme ensemble solution : } S = \left\{ i, \frac{-\sqrt{3}-i}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \right\}$$

$$|i| = 1, \quad \left| \frac{-\sqrt{3}-i}{2} \right| = \left| \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \right| = \frac{3+1}{4} = 1. \text{ L'affirmation 4 est donc vraie.}$$

$$5. z_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } z_{n+1} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} z_n.$$

$$z_{n+1} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} z_n = 2iz_n$$

$$z_1 = 2iz_0 = 2i \times 2 = 4i$$

$$z_2 = 2iz_1 = 2i \times 4i = -8$$

$$\text{Soit } K \text{ le milieu du segment } [M_0M_2], \quad z_K = \frac{z_0 + z_2}{2} = \frac{2-8}{2} = -3.$$

le point O n'est donc pas le milieu du segment $[M_0M_2]$, l'affirmation 5 est fausse.

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère l'équation (E) $x^2 - 5y^2 = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

Partie A

1. Si x et y sont deux entiers naturels pairs, il existe deux entiers naturels p et q tels que $x = 2p$ et $y = 2q$.

$$(x; y) \text{ est un couple solution de l'équation (E)} \iff x^2 - 5y^2 = 1$$

$$\iff (2p)^2 - 5(2q)^2 = 1 \iff 4p^2 - 5 \times 4q^2 = 1 \iff 4(p^2 - 5q^2) = 1$$

On en déduit 4 est un diviseur de 1, ce qui est impossible. Donc x et y ne peuvent pas être tous les deux pairs.

Si x et y sont deux entiers naturels impairs, il existe deux entiers naturels p et q tels que $x = 2p + 1$ et $y = 2q + 1$.

$$(x; y) \text{ est un couple solution de l'équation (E)} \iff x^2 - 5y^2 = 1$$

$$\iff (2p+1)^2 - 5(2q+1)^2 = 1 \iff 4p^2 + 4p + 1 - 5(4q^2 + 4q + 1) = 1$$

$$\iff 4p^2 + 4p + 1 - 20q^2 - 20q - 5 = 1 \iff 4p^2 + 4p - 20q^2 - 20q - 4 = 1$$

$$\iff 4(p^2 + p - 5q^2 - 5q - 1) = 1$$

On en déduit que 4 est un diviseur de 1, ce qui est impossible. Donc x et y ne peuvent pas être tous les deux impairs.

En conclusion, x et y ne peuvent pas avoir la même parité.

2. Soit d un diviseur commun à x et y , il existe deux entiers naturels X et Y tels que $x = dX$ et $y = dY$.

$$(x; y) \text{ est un couple solution de l'équation (E)} \iff x^2 - 5y^2 = 1$$

$$\iff (dX)^2 - 5(dY)^2 = 1 \iff d^2 X^2 - 5(d^2 Y^2) = 1$$

$$\iff d^2 (X^2 - 5Y^2) = 1$$

On en déduit que d^2 est un diviseur de 1, donc $d = 1$.

Le seul diviseur commun à x et y est 1, x et y sont donc premiers entre eux.

3. Soit k un entier naturel.

Reste de la division euclidienne de k par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de k^2 par 5	0	1	4	4	1

4. $(x; y)$ est un couple solution de l'équation (E) donc $x^2 = 1 + 5y^2$

On en déduit que $x^2 \equiv 1 [5]$, d'après le tableau précédent on a alors $x \equiv 1 [5]$ ou $x \equiv 4 [5]$.

Partie B

1. $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ d'où $\begin{cases} x_{n+1} = 9x_n + 20y_n \\ y_{n+1} = 4x_n + 9y_n \end{cases}$

2. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , (x_n, y_n) est solution de l'équation (E).

• **Initialisation** : $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$ donc $x_0^2 - 5y_0^2 = 1$

La propriété est vraie au rang 0.

• **Hérédité** : Supposons la propriété vraie au rang n , c'est-à-dire $x_n^2 - 5y_n^2 = 1$ et démontrons qu'alors elle est vraie au rang $(n + 1)$, c'est à dire $x_{n+1}^2 - 5y_{n+1}^2 = 1$

$$\begin{aligned} (x_{n+1})^2 - 5(y_{n+1})^2 &= (9x_n + 20y_n)^2 - 5(4x_n + 9y_n)^2 \\ &= 81x_n^2 + 360x_ny_n + 400y_n^2 - 5(16x_n^2 + 72x_ny_n + 81y_n^2) \\ &= 81x_n^2 + 360x_ny_n + 400y_n^2 - 80x_n^2 - 360x_ny_n - 405y_n^2 = x_n^2 - 5y_n^2 = 1 \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $(n + 1)$; elle est héréditaire.

• **Conclusion** : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc, par application du principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n .

3. a. $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 + 80 & 180 + 180 \\ 36 + 36 & 80 + 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 161 & 360 \\ 72 & 161 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 161 & 360 \\ 72 & 161 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \begin{cases} x_2 = 161 \\ y_2 = 72 \end{cases}$$

b. Soit p un entier naturel.

$$\begin{pmatrix} x_{p+2} \\ y_{p+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{p+1} \\ y_{p+1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 161 & 360 \\ 72 & 161 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } y_{p+2} = 72x_p + 161y_p$$

Si y_p est multiple de 9, il existe un entier naturel k tel que $y_p = 9k$

$$\text{d'où } y_{p+2} = 72x_p + 161 \times 9k = 9(8x_p + 161k), \text{ donc } x_{p+2} \text{ est bien multiple de 9.}$$

c. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , y_{2n} est un multiple de 9.

• **Initialisation** : $y_0 = 0$ est bien multiple de 9.

La propriété est vraie au rang 0.

• **Hérédité** : Supposons la propriété vraie au rang n , et démontrons qu'alors elle est vraie au rang $(n + 1)$.

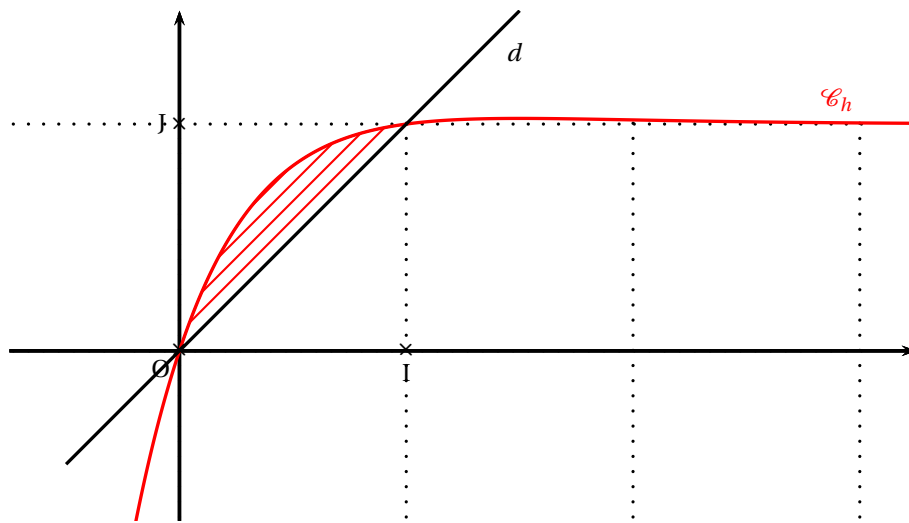
$y_{2(n+1)} = y_{2n+2}$, d'après la question précédente, puisque y_{2n} est multiple de 9, alors y_{2n+2} est également multiple de 9.

Donc la propriété est vraie au rang $(n + 1)$; elle est héréditaire.

• **Conclusion** : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc, par application du principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n .

$$y_{2020} = y_{(2 \times 1010)} \text{ est donc un multiple de 9.}$$

ANNEXE 1 (exercice 2, partie C)



ANNEXE 2 (exercice 3)

