Corrigé du baccalauréat S Métropole–La Réunion
11 septembre 2020

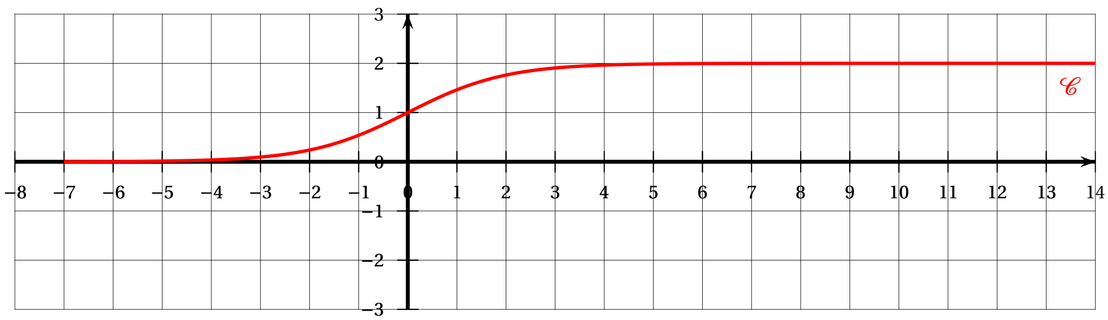
Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé.



1. On sait que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{0}{1} = 0$.

   On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $-\infty$.

2. $f(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{\,x}}{\mathrm{e}^{\,x}+1} = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{\,x} \times \mathrm{e}^{\,-x}}{(\mathrm{e}^{\,x}+1) \times \mathrm{e}^{\,-x}} = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{\,-x}}$

   Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2$.

   Ceci montre que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1) - \mathrm{e}^x \times 2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x+1}$.

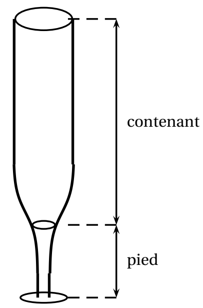
4. Pour tout x, $\mathrm{e}^{\,x} > 0$ donc, comme $f(x)$ est le quotient de deux réels supérieurs à zéro, $f(x) > 0$; $f'(x) > 0$ comme quotient de deux nombres positifs : la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ de 0 à 2.

5. On a $f(0) = \dfrac{2}{1+1} = \dfrac{2}{2} = 1$, donc $\mathrm{I}(0\,;\,1) \in \mathscr{C}$.

   La tangente à $\mathscr{C}$ au point I a pour coefficient directeur $f'(0) = \dfrac{f(0)}{\mathrm{e}^{\,0}+1} = \dfrac{1}{2}$.

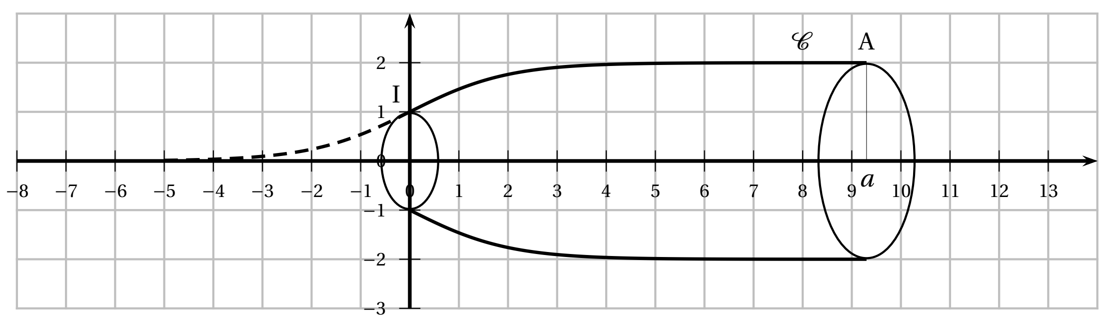
Partie B

Une entreprise souhaite fabriquer de façon automatisée des flûtes (verres à pied) de forme allongée de contenance 12,5 cL. Chaque flûte est composée de deux parties comme sur l'illustration ci-contre : un pied, en verre plein, et un contenant de 12,5 cL.
À l'aide de la fonction f définie dans la **partie A**, le fabricant modélise le profil du contenant de la flûte de la manière décrite ci-dessous.



Soit A un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a strictement positive. La rotation autour de l'axe des abscisses appliquée à la partie de $\mathscr{C}$ limitée par les points I et A engendre une surface modélisant le contenant de la flûte en prenant pour unité 1 cm.

Ainsi x et $f(x)$ représentent des longueurs en centimètres et l'objectif de cette partie est de déterminer la valeur de a pour que le volume du contenant soit égal à 12,5 cL.



Le réel a étant strictement positif, on admet que le volume $V(a)$ de ce solide en cm^3 est donné par la formule : $V(a) = \pi \displaystyle\int_0^a (f(x))^2\,\mathrm{d}x$.

1. $$4\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} + \frac{-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\right) = 4\left(\frac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+1\right)-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\right) = 4\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\right) = 4\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\right)$$
$$= 4\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right)^2 = \left(\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right)^2 = (f(x))^2$$

2. On détermine une primitive sur $\mathbb{R}$ de chaque fonction : $g : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ et $h : x \longmapsto \dfrac{-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$.

Si $u(x) = \mathrm{e}^{\,x}+1$, alors $u'(x) = \mathrm{e}^{\,x}$:

- on a $g(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ qui a pour primitive $x \longmapsto \ln|u(x)|$.
  Or, pour tout x, $\mathrm{e}^{\,x}+1>0$, donc la fonction g a pour primitive la fonction $x \longmapsto \ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)$;
- on a $h(x) = \dfrac{-u'(x)}{u^{(}x)}$ qui a pour primitive $x \longmapsto \dfrac{1}{u(x)}$.
  Donc la fonction h a pour primitive la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\,x}+1}$.

3. D'après les résultats précédents :
$$V(a) = \pi\int_0^a (f(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^a 4\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}+\frac{-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = \pi\int_0^a 4\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x + \pi\int_0^a 4\frac{-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \pi\left[4\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)\right]_0^a + \pi\left[4\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right]_0^a = 4\pi\ln\left(\mathrm{e}^a+1\right) - 4\pi\ln 2 + \frac{4\pi}{\mathrm{e}^a+1} - 4\pi\frac{1}{2}$$
$$= 4\pi\left[\ln\left(\frac{\mathrm{e}^a+1}{2}\right) + \frac{1}{\mathrm{e}^a+1} - \frac{1}{2}\right].$$

4. On cherche une valeur approchée de a à $0,1$ près, sachant qu'une flûte doit contenir 12,5 cL.

La calculatrice donne $V(1,92) \approx 12,46$ et $V(1,93) \approx 12,56$.

Donc $V(1,9) \approx 12,5$, donc $a \approx 1,9$ à 10^{-1} près.

Partie C

Un client commande un lot de 400 flûtes de 12,5 cL et constate que 13 d'entre elles ne sont pas conformes aux caractéristiques annoncées par le fabricant. Le responsable des ventes lui avait pourtant affirmé que 98 % des flûtes vendues par l'entreprise était conforme.

La fréquence de flûtes conformes est $p = 0,98$.

$n = 400 \geqslant 30$, $np = 392 \geqslant 5$ et $n\left(1-p\right) = 9 \geqslant 5$ donc on peut établir un intervalle de fluctuation asymptotique eu risque de 5 % :

$$I_{400} = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
$$= \left[0,98 - 1,96\frac{\sqrt{0,98\times 0,02}}{20}\ ;\ 0,98 + 1,96\frac{\sqrt{0,98\times 0,02}}{20}\right] \approx \left[0,966\ ;\ 0,994\right].$$

Avec 13 flûtes non conformes, la proportion de flûtes conformes est $\dfrac{387}{400} = 0,9675$.

Comme $0,9675 \in \left[0,966\ ;\ 0,994\right]$, le client ne peut pas mettre en doute l'affirmation du responsable.

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Une machine fabrique des boules destinées à un jeu de hasard.
La masse en grammes, de chacune de ces boules peut-être modélisée par une variable aléatoire M suivant une loi normale d'espérance 52 et d'écart type σ.
Les boules dont la masse est comprise entre 51 et 53 grammes sont dites conformes.

1. Avec les réglages initiaux de la machine on a $\sigma = 0,437$.

La probabilité qu'une boule fabriquée par cette machine soit conforme est $0,978$ au millième près, soit 1 à 10^{-1} près.

2. On considère que la machine est correctement réglée si au moins 99 % des boules qu'elle fabrique sont conformes.

Déterminer une valeur approchée de la plus grande valeur de σ qui permet d'affirmer que la machine est correctement réglée revient à trouver σ tel que $P(51 \leqslant M \leqslant 53) \geqslant 0,99$.

Considérons la variable aléatoire Y telle que $Y = \dfrac{M-52}{\sigma}$ qui suit donc la loi normale centrée réduite et on a donc

$P(51 < M < 53) = 0,99 \iff P(-1 \leqslant M - 52 \leqslant 1) \geqslant 0,99 \iff P\left(\dfrac{-1}{\sigma} \leqslant \dfrac{M-52}{\sigma} \leqslant \dfrac{1}{\sigma}\right) \geqslant 0,99 \iff$

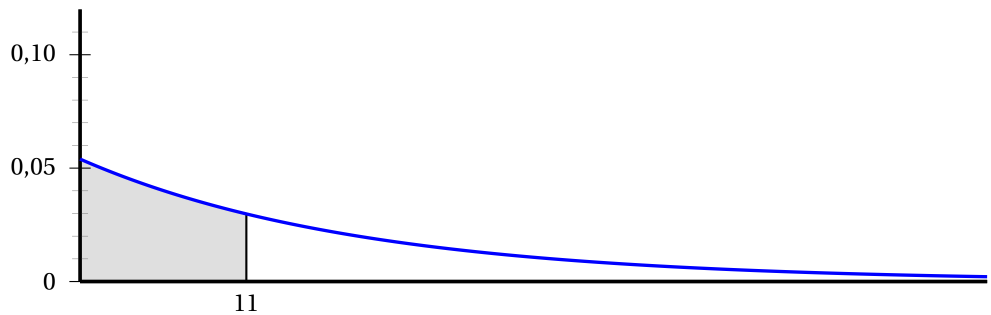
$2P\left(Y \leqslant \dfrac{1}{\sigma}\right) \geqslant 0,99 \iff 2P\left(Y \leqslant \dfrac{1}{\sigma}\right) \geqslant 1,99 \iff P\left(Y \leqslant \dfrac{1}{\sigma}\right) \geqslant 0,995.$

La calculatrice donne $\dfrac{1}{\sigma} \geqslant 2,5758$ soit $\sigma \leqslant 0,388$.

La plus grande valeur de sigma est donc $0,388$ au millième près.

Partie B

La pesée des boules se fait sur des balances électroniques de précision. Chaque jour, on vérifie que la balance n'est pas déréglée. La durée, en jour, d'utilisation de ces balances avant dérèglement est modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètres λ. La courbe représentative de la fonction densité de cette variable aléatoire T est donnée ci-dessous.



1. **a.** On sait que la fonction densité est définie par $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$; donc $f(0) = \lambda$.
   On lit sur la figure : $0,05 < \lambda < 0,06$.

   b. L'aire du domaine grisé, en unité d'aire, est égale à $0,45$ et correspond à $P(M \leqslant 11)$.
   On sait que l'aire est égale, en unité d'aire, à l'intégrale de la fonction densité sur l'intervalle $[0\,;\,11]$, soit :
   $0,45 = \displaystyle\int_0^{11} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^{11} = -\mathrm{e}^{-11\lambda} - (-1) \iff 0,45 = 1 - \mathrm{e}^{-11\lambda} \iff 0,55 = \mathrm{e}^{-11\lambda}$
   soit, par croissance de la fonction logarithme népérien :
   $\ln 0,55 = -11\lambda \iff \lambda = \dfrac{\ln 0,55}{-11} = -\dfrac{\ln 0,55}{11} \approx 0,054349 \approx 0,054$ au millième près.

Dans la suite, on prendra $\lambda = 0,054$.

2. La durée moyenne d'utilisation d'une balance sans qu'elle ne se dérègle est :
   $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} \approx \dfrac{1}{0,054} \approx 18,51$ soit environ 19 (jours).

3. Une balance est mise en service le 1er janvier 2020. Elle fonctionne sans se dérégler du 1er au 20 janvier inclus.
   La probabilité qu'elle fonctionne sans se dérégler jusqu'au 31 janvier inclus est :
   $P_{P(T \geqslant 20)}(T \geqslant 20 + 11) = P(T \geqslant 11) = \mathrm{e}^{-11\lambda} \approx \mathrm{e}^{-11 \times 0,054} \approx 0,552.$

Partie C

On dispose de deux urnes U et V contenant des boules fabriquées comme précédemment. Sur chacune des boules est inscrit l'un des nombres -1, 1, ou 2.

L'urne U contient une boule portant le nombre 1 et trois boules portant le nombre -1.

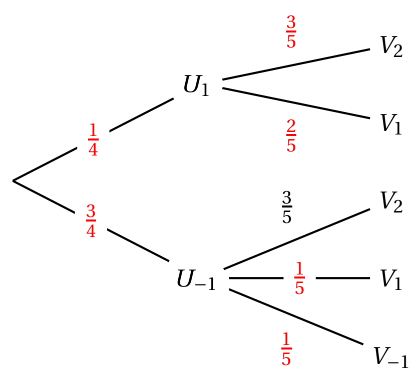
L'urne V contient une boule portant le nombre 1 et trois boules portant le nombre 2.

On considère un jeu lequel chaque partie se déroule de la manière suivante : dans un premier temps on tire au hasard une boule dans l'urne U, on note x le nombre inscrit sur cette boule puis on la met dans l'urne V. Dans un deuxième temps, on tire au hasard une boule dans l'urne V et on note y le nombre inscrit sur cette boule.

On considère les évènements suivants :

- U_1 : « on tire une boule portant le nombre 1 dans l'urne U, c'est-à-dire $x = 1$ » ;
- U_{-1} : « on tire une boule portant le nombre -1 dans l'urne U c'est-à-dire $x = -1$ » ;
- V_2 : « on tire une boule portant le nombre 2 dans l'urne V c'est-à-dire $y = 2$ » ;
- V_1 : « on tire une boule portant le nombre 1 dans l'urne V c'est-à-dire $y = 1$ » ;
- V_{-1} : « on tire une boule portant le nombre -1 dans l'urne V », c'est-à-dire $y = -1$ ».

1. On complète l'arbre pondéré :



2. Dans ce jeu, à chaque partie on associe le nombre complexe $z = x + \text{i}y$.

On calcule les probabilités des évènements suivants.

a. A : « $z = -1 - \text{i}$ » ;

Cela signifie que $x = -1$ et $y = -1$, donc que

$P(A) = P\left(U_{-1} \cap V_{-1}\right) = P\left(U_{-1}\right) \times P_{U_{-1}}\left(V_{-1}\right) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{20} = \dfrac{15}{100} = 0,15.$

b. B : « z et solution de l'équation $t^2 + 2t + 5 = 0$ » ;

Avec $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4\text{i})^2 < 0$, on sait qu'il y a deux solutions complexes :

$z_1 = \dfrac{-2+4\text{i}}{2} = -1 + 2\text{i}$ et $z_2 = \dfrac{-2-4\text{i}}{2} = -1 - 2\text{i}$.

Dans le premier cas : $x = -1$ et $y = 2$ et dans le second $x = -1$ et $y = -2$ ce qui n'arrive pas.

On a donc $P(B) = P\left(U_{-1} \cap V_2\right) = P\left(U_{-1}\right) \times P_{U_{-1}}\left(V_2\right) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{20} = \dfrac{45}{100} = 0,45.$

c. C : « Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ le point M d'affixe z appartient au disque de centre O et de rayon 2 ».

Les coordonnées $(x\,;\,y)$ d'un point M du disque vérifient $x^2+y^2\leqslant 4$.

- si $x=1$ et $y=1$, alors $x^2+y^2=2\leqslant 4$; $P(U_1\cap V_1)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{20}$.
- si $x=-1$ et $y=-1$, alors $x^2+y^2=2\leqslant 4$; $P(U_{-1}\cap V_{-1})=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{20}$.
- si $x=-1$ et $y=1$, alors $x^2+y^2=2\leqslant 4$; $P(U_{-1}\cap V_1)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{20}$.

Conclusion : $P(C)=\dfrac{2}{20}+\dfrac{3}{20}+\dfrac{3}{20}=\dfrac{8}{20}=\dfrac{2}{5}$.

3. Lors d'une partie, on obtient le nombre 1 sur chacune des boules tirées. On va montrer que le nombre complexe z associé à cette partie vérifie $z^{2020}=-2^{1010}$.

On a donc $z=1+1\text{i}=1+\text{i}$, donc$|z|^2=1^2+1^2=2$.

On peut écrire z sous la forme : $z=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.

Il en résulte que : $z^{2020}=\left(\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{2020}=\left(\sqrt{2}\right)^{2020}\times\left(\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{2020}$.

- $\left(\sqrt{2}\right)^{2020}=\left(\sqrt{2}\right)^{2\times1010}=\left(\sqrt{2}^2\right)^{1010}=2^{1010}$
- $\left(\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{2020}=\text{e}^{\text{i}\frac{2020\pi}{4}}=\text{e}^{505\text{i}\pi}=\text{e}^{\text{i}\pi}\times\text{e}^{504\text{i}\pi}=-1\times\left(\text{e}^{2\text{i}\pi}\right)^{252}=-1\times1^{252}=-1$.

Finalement : $z^{2020}=-2^{1010}$.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

On considère les points A$(1\,;1\,;4)$; B$(4\,;2\,;5)$; C$(3\,;\,0\,;\,-2)$ et J$(1\,;4\,;2)$.

On note :
- $\mathscr{P}$ le plan passant par les points A, B et C ;
- $\mathscr{D}$ la droite passant par le point J et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

1. Position relative de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{D}$

a. On montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{P}$.

On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-6\end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\vec{n}=3-4+1=0$: les vecteurs sont orthogonaux ;
- $\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\vec{n}=2+4-6=0$: les vecteurs sont orthogonaux.

Le vecteur $\vec{n}$, orthogonal à deux vecteurs manifestement non colinéaires du plan (ABC), est donc un vecteur normal à ce plan.

b. On détermine une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC) donc le plan (ABC) a une équation de la forme $x-4y+z+d=0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{A}(1\,;\,1\,;\,4) \in (\mathrm{ABC})$ donc $1-4+4+d=0 \iff d=-1$.

Donc le plan (ABC) a pour équation : $x-4y+z-1=0$

c. On va montrer que $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$.

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}=1-4+3=0$: les vecteurs $\overrightarrow{u}$ (vecteur directeur de $\mathscr{D}$) et $\overrightarrow{n}$ (vecteur normal à $\mathscr{P}$) sont orthogonaux ce qui montre que $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$.

On rappelle que, un point I et un nombre réel strictement positif r étant donnés, la sphère de centre I et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\mathrm{I}M=r$.

On considère le point $\mathrm{I}(1\,;9\,;0)$ et on appelle $\mathscr{S}$ la sphère de centre I et de rayon 6.

2. Position relative de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{S}$

a. On va montrer que la droite Δ passant par I est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ coupe ce plan $\mathscr{P}$ au point $\mathrm{H}\,(3\,;1\,;2)$.

La droite Δ passant par I et orthogonale au plan $\mathscr{P}$ a donc pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.

Donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta \iff \overrightarrow{\mathrm{I}M}=\alpha\overrightarrow{n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, soit :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\Delta \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& \alpha\\ y-9 &=& -4\alpha\\ z-0 &=& \alpha\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+\alpha\\ y &=& 9-4\alpha\\ z &=& \alpha\end{array}\right.,\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Le point d'intersection H de Δ et de $\mathscr{P}$ a ses coordonnées qui vérifient les équations de la droite et celle du plan, soit le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+\alpha\\ y &=& 9-4\alpha\\ z &=& \alpha\\ x-4y+z-1 &=& 0\end{array}\right.$

On a donc $(1+\alpha)-4\,(9-4\alpha)+\alpha-1=0$ ce qui équivaut $\alpha=2$.

$x=1+\alpha=3$, $y=9-4\alpha=1$ et $z=\alpha=2$ donc le point H a pour coordonnées $(3\,;1\,;2)$.

b. On calcule la distance IH.

$\mathrm{IH}^2=(3-1)^2+(1-9)^2+(2-0)^2=4+64+4=72$; donc $\mathrm{IH}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$.

On admet que pour tout point M du plan $\mathscr{P}$ on a $\mathrm{I}M \geqslant \mathrm{IH}$.

c. La sphère $\mathscr{S}$ a pour centre I et la distance IH du centre au plan $\mathscr{P}$ est $6\sqrt{2}$ qui est supérieure au rayon $r=6$ de la sphère.

Donc le plan $\mathscr{P}$ ne coupe pas la sphère $\mathscr{S}$

3. Position relative de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{S}$

a. On détermine une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$, passant par J et de vecteur directeur $\vec{u}$..

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{D} \iff \overrightarrow{\mathrm{J}M}=t\overrightarrow{u} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& t\\ y-4 &=& t\\ z-2 &=& 3t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}\text{, soit :}$$

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{D} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& 4+t\\ z &=& 2+3t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

b. $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{S} \iff \mathrm{I}M=6 \iff \mathrm{I}M^2=36 \iff (x-1)^2+(y-(-4))^2+(z-0)^2=36$
$\iff (x-1)^2+(y-9)^2+z^2=36.$

c. On a $IJ^2 = (1-1)^2 + (9-4)^2 + (2-0)^2 = 25+4 = 29$.
Donc $IJ = \sqrt{29} \approx 5,4 < 6$ longueur du rayon de la sphère : ceci montre que J est intérieur à la sphère et donc toute droite contenant J coupe la sphère en deux points.

Exercice 4 **4 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel non nul n, par : $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

La suite (v_n) est définie par :

$v_1 = u_1$, $v_2 = u_1 \times u_2$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $v_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = v_{n-1} \times u_n$.

1. $u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $u_2 = \dfrac{8}{9}$, donc $v_2 = u_1 \times u_2 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{8}{9} = \dfrac{3\times 4\times 2}{4\times 3\times 3} = \dfrac{2}{3}$.
$u_3 = \dfrac{15}{16}$, donc $v_3 = u_1 \times u_2 \times u_3 = v_2 \times u_3 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{15}{16} = \dfrac{5}{8}$.

2.

On complète l'algorithme ci-contre afin que, après son exécution, la variable V contiennent la valeur v_n où n est un nombre entier naturel non nul défini par l'utilisateur.

Algorithme
1. $V \leftarrow 1$
2. Pour i variant de 1 à n
3. $\quad U \leftarrow \dfrac{i(i+2)}{(i+1)^2}$
4. $\quad V \leftarrow V \times U$
5. Fin Pour

3. **a.** On a, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

b. De par sa définition u_n quotient de deux termes supérieurs à 0 est supérieur à 0.
D'après la question précédente comme $\dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, $1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} < 1$, soit $u_n < 1$, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Conclusion : pour $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

4. **a.** Quel que soit n, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_1 \times \ldots \times u_n \times u_{n+1}}{u_1 \times \ldots \times u_n} = u_{n+1}$.
Or d'après la question précédente $u_{n+1} < 1$, donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, donc la suite (v_n) est décroissante.

b. Les termes u_n étant supérieurs à zéro, les termes v_n sont supérieurs à zéro.
On a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < v_n$.
La suite (v_n) est donc décroissante et minorée par 0; d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente vers un réel supérieur ou égal à zéro.

5. **a.** $v_{n+1} = v_n \times u_{n+1} = v_n \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$.

b. Soit la propriété : $v_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

- *Initialisation*

$v_1 = u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{1+2}{2\times 2} = \dfrac{3}{4}$: la relation est vraie au rang 1.

- *Hérédité*

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 1$ et supposons que $v_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

D'après la question précédente :

$v_{n+1} = v_n \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \dfrac{n+2}{2(n+1)} \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \dfrac{n+3}{2(n+2)} = \dfrac{(n+1)+2}{2((n+1)+1)}$;

la relation est vraie au rang $n+1$.

- *Conclusion*

La relation est vraie au rang 1 et si elle est vraie à un rang au moins égal à 1, elle est vraie au rang suivant ; d'après le principe de récurrence : pour tout entier naturel non nul n, $v_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

c. On peut puisque $n \neq 0$ écrire $v_n = \dfrac{1+\frac{2}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$, donc par somme et quotient de limites : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2\times 1} = \frac{1}{2}$.

6. On considère la suite w_n définie par

$w_1 = \ln(u_1)$, $w_2 = \ln(u_1) + \ln(u_2)$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, par

$w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(u_k) = \ln(u_1) + \ln(u_2) + \ldots + \ln(u_n)$.

On a $w_1 = \ln(u_1) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$;

$w_7 = \ln(u_1) + \ln(u_2) + \ldots + \ln(u_7) = \ln(u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_7) = \ln(v_7)$ soit d'après le résultat de la question 5. c. : $w_7 = \ln\dfrac{7+2}{2(7+1)} = \ln\dfrac{9}{16}$.

Or $\dfrac{9}{16} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$, donc : $w_7 = \ln\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = 2\ln\dfrac{3}{4} = 2w_1$.

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Pour tout entier naturel n, on définit les entiers $a_n = 6\times 5^n - 2$ et $b_n = 3\times 5^n + 1$.

1. a. $5 \equiv 1\ [4]$ donc $5^n \equiv 1^n\ [4]$ donc $5^n \equiv 1\ [4]$

- $6\times 5^n \equiv 6\times 1 \equiv 6\ [4]$ donc $6\times 5^n - 2 \equiv 6-2 \equiv 0\ [4]$ donc $a_n \equiv 0\ [4]$
- $3\times 5^n \equiv 3\times 1 \equiv 3\ [4]$ donc $3\times 5^n + 1 \equiv 3+1 \equiv 0\ [4]$ donc $b_n \equiv 0\ [4]$

b. Pour tout entier naturel n, $2b_n - a_n = 2(3\times 5^n + 1) - (6\times 5^n - 2) = 6\times 5^n + 2 - 6\times 5^n + 2 = 4$.

c.
- $2b_n - a_n = 4$ donc, d'après le théorème de Bézout, le PGCD de a_n et b_n est un diviseur de 4.
- 4 divise a_n et 4 divise b_n donc 4 divise leur PGCD.

On peut donc en déduire que le PGCD de a_n et b_n est 4.

2. **a.** $b_{2020} = 3 \times 5^{2020} + 1$

$5 \equiv -2$ [7] donc $5^{2020} \equiv (-2)^{2020}$ [7] donc $3 \times 5^{2020} \equiv 3 \times (-2)^{2020}$ [7] et donc $3 \times 5^{2020} + 1 \equiv 3 \times (-2)^{2020} + 1$ [7]

Cela veut dire que $b_{2020} \equiv 3 \times (-2)^{2020} + 1$ [7].

Comme 2020 est pair, $(-2)^{2020} = 2^{2020}$; on en déduit que $b_{2020} \equiv 3 \times 2^{2020} + 1$ [7].

b. $2020 = 3 \times 673 + 1$, donc : $2^{2020} = 2^{3\times 673+1} = \left(2^3\right)^{673} \times 2$.

Or $2^3 = 8 \equiv 1$ [7]. Donc $\left(2^3\right)^{673} \equiv 1^{673} \equiv 1$ [7].

On déduit : $\left(2^3\right)^{673} \times 2 \equiv 1 \times 2 \equiv 2$ [7] donc $3 \times \left(2^3\right)^{673} \times 2 \equiv 3 \times 2 \equiv 6$ [7].

On peut alors dire que $3 \times \left(2^3\right)^{673} \times 2 + 1 \equiv 6 + 1 \equiv 0$ [7], donc b_{2020} est divisible par 7.

c. L'entier b_n est divisible par 4 pour tout n, donc b_{2020} est divisible par 4 ; de plus b_{2020} est divisible par 7 donc, 4 et 7 étant premiers entre eux, b_{2020} est divisible par 28.

L'entier a_n est divisible par 4 pour tout n, donc a_{2020} est divisible par 4.

On sait que le PGCD de a_n et b_n est 4 donc le PGCD de a_{2020} et b_{2020} est 4.

Si a_{2020} est divisible par 7, alors a_{2020} est divisible par 28, et le PGCD de a_{2020} et b_{2020} est 28, ce qui est faux.

Donc a_{2020} n'est pas divisible par 7.

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} &=& 3u_n + 4v_n \\ v_{n+1} &=& u_n + 3v_n \end{array}\right.$$

Pour un entier naturel N donné, on souhaite calculer les termes de rang N des suites (u_n) et (v_n) et on se demande si l'algorithme ci-contre permet ce calcul.

Algorithme	
1.	$U \leftarrow 1$
2.	$V \leftarrow 1$
3.	$K \leftarrow 0$
4.	Tant que $K < N$
5.	$U \leftarrow 3U + 4V$
6.	$V \leftarrow U + 3V$
7.	$K \leftarrow K + 1$
8.	Fin Tant que

1. On fait fonctionner l'algorithme avec $N = 2$.

On complète le tableau ci-contre en donnant les valeurs successivement affectées aux variables U, V et K.

U	V	K
1	1	0
7	10	1
61	91	2

2. L'algorithme ne permet pas de calculer u_N et v_N pour une valeur de N donnée car

$u_1 = 3u_0 + 4v_0 = 7$ et $v_1 = u_0 + 3v_0 = 4$ alors que la valeur de v_1 calculée par l'algorithme est 10.

On écrit une version corrigée de cet algorithme afin que les variables U et V contiennent bien les valeurs de u_N et v_N à la fin de son exécution :

Algorithme	
1.	$U \leftarrow 1$
2.	$V \leftarrow 1$
3.	$K \leftarrow 0$
4.	Tant que $K < N$
5.	$X \leftarrow U$
6.	$U \leftarrow 3U + 4V$
7.	$V \leftarrow X + 3V$
8.	$K \leftarrow K + 1$
9.	Fin Tant que

Partie C

Pour tout entier naturel n, on définit la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 3u_n + 4v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 3v_n \end{array} \right.$ donc $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $X_n = A^n X_0$.

- **Initialisation**
  $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $A^0 X_0 = X_0$
  La propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie pour un rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $X_n = A^n X_0$.
  $X_{n+1} = AX_n = A(A^n X_0) = (AA^n) X_0 = A^{n+1} X_0$
  Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, $A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \times 5^n + 2 & 4 \times 5^n - 4 \\ 5^n - 1 & 2 \times 5^n + 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = X_n = A^n X_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \times 5^n + 2 & 4 \times 5^n - 4 \\ 5^n - 1 & 2 \times 5^n + 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \times 5^n + 2 + 4 \times 5^n - 4 \\ 5^n - 1 + 2 \times 5^n + 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 \times 5^n - 2 \\ 3 \times 5^n + 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Donc $u_n = \frac{a_n}{4}$ et $v_n = \frac{b_n}{4}$.

4. On sait que le PGCD de a_n est b_n est égal à 4, donc le PGCD de $\frac{a_n}{4}$ et $\frac{b_n}{4}$ est égal à 1 ; donc les nombres u_n et v_n sont premiers entre eux.