BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ – CORRIGÉ

Session 15 mars 2021 Sujet 1

Exercice 1 — Commun à tous les candidats — 5 points

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

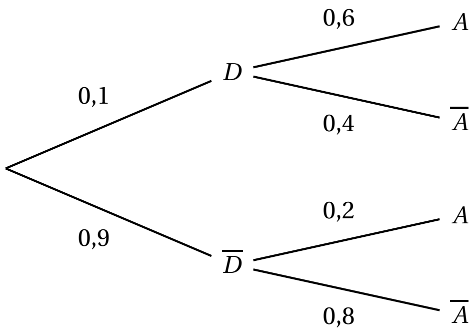
- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie I

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènement D et A respectivement.

1. On traduit la situation par un arbre pondéré :



2. La probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école est :
$P(D \cap A) = 0{,}1 \times 0{,}6 = 0{,}06$.

3. La probabilité de l'évènement A est $P(A)$.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(A) = P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A) = 0{,}06 + 0{,}9 \times 0{,}2 = 0{,}24$.

4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. La probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné est :
$P_A(\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}18}{0{,}24} = 0{,}75$.

Partie II

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,24.
On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
La probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $p = 0{,}24$, et on choisit un échantillon de 7 candidats donc $n = 7$.
La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(7\,;\,0{,}24)$.

b. La probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école est :
$P(X = 1) = \dbinom{7}{1} \times 0{,}24^1 \times (1 - 0{,}24)^{7-1} \approx 0{,}32$.

c. La probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école est : $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - 0{,}47 = 0{,}53$.

2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.

On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

a. La variable aléatoire Y qui donne le nombre d'admis parmi les n candidats présentés suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,0{,}24)$.

La probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école est :

$P(Y = 0) = \binom{n}{0} \times 0{,}24^0 \times 0{,}76^n = 0{,}76^n$.

b. On cherche à partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à 0,99.

On veut donc que $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$ c'est-à-dire $1 - P(Y = 0) \geqslant 0{,}99$ ou encore $P(Y = 0) \leqslant 0{,}01$. On résout l'inéquation d'inconnue n : $0{,}76^n \leqslant 0{,}01$:

$0{,}76^n \leqslant 0{,}01 \iff \ln(0{,}76^n) \leqslant \ln(0{,}01) \iff n \times \ln(0{,}76) \leqslant \ln(0{,}01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}76)}$

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}76)} \approx 16{,}8$ donc c'est à partir de 17 élèves que la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 2 — Commun à tous les candidats — 5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\text{e}^x}{x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. a. D'après le cours, la limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$.

b. On cherche la limite de f en 0 :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 0} \text{e}^x = 1 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\text{e}^x}{x} = +\infty$$

Donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{\text{e}^x \times x - \text{e}^x \times 1}{x^2} = \dfrac{\text{e}^x(x-1)}{x^2}$.

3. Pour déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on cherche le signe de $f'(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$f(1) = \dfrac{\text{e}^1}{1} = \text{e}$

On établit le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

4. Soit m un nombre réel. On cherche, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
Cela revient à chercher le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite horizontale d'équation $y = m$.
D'après le tableau de variations :

- si $m < \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solution ;
- si $m = \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique $x = 1$;
- si $m > \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
On note A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

a. La tangente en a est parallèle à la droite Δ si et seulement si le coefficient directeur de la tangente est égal à -1, autrement dit quand $f'(a) = -1$.

$$f'(a) = -1 \iff \frac{\mathrm{e}^{a}(a-1)}{a^2} = -1 \iff \mathrm{e}^{a}(x-1) = -a^2 \iff \mathrm{e}^{a}(x-1) + a^2 = 0$$

ce qui veut dire que le nombre a est solution de l'équation $\mathrm{e}^{x}(x-1) + x^2 = 0$.

On note g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{x}(x-1) + x^2$.
On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

b. $g'(x) = \mathrm{e}^{x} \times (x-1) + \mathrm{e}^{x} \times 1 + 2x = x\mathrm{e}^{x} + 2x$
Sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc sur $[0\,;\,+\infty[$, $x\mathrm{e}^{x} + 2x \geqslant 0$ donc $g'(x) \geqslant 0$.

$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x-1 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$g(0) = \mathrm{e}^{0}(0-1) + 0 = -1$
On dresse le tableau de variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$:

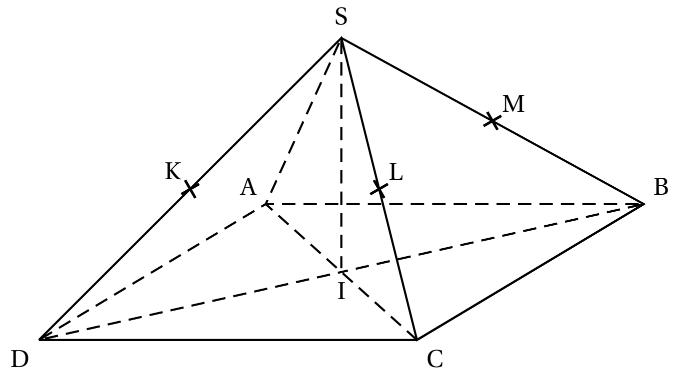
x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

c. On complète le tableau de variations de g :

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'après ce tableau, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique a sur $[0\,;\,+\infty[$, donc il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

Exercice 3 — Commun à tous les candidats — 5 points



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur. Le point I est le centre du carré ABCD. On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) $\boxed{\textbf{c.}\ \text{(AC) et (SB)}}$ **d.** (LM) et (AD)

On procède par élimination.

- Les droites (DK) et (SD) sont sécantes en D donc coplanaires; on élimine **a.**
- Les droites (AS) et (IC) sont sécantes en A donc coplanaires; on élimine **b.**
- Les droites (LM) et (AD) sont toutes deux parallèles à (BC) donc parallèles entre elles; elles sont donc coplanaires; on élimine **d.**

Réponse c.

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\text{I}\ ;\ \overrightarrow{\text{IC}}, \overrightarrow{\text{IB}}, \overrightarrow{\text{IS}}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\text{I}(0\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \text{A}(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \text{B}(0\ ;\ 1\ ;\ 0)\ ;\ \text{C}(1\ ;\ 0\ ;\ 0) ; \text{D}(0\ ;\ -1\ ;\ 0)\ ;\ \text{S}(0\ ;\ 0\ ;\ 1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ $\boxed{\textbf{b.}\ \left(\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)}$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$

- Le milieu K de [SD] a pour coordonnées $\left(0\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
- Le milieu L de [SC] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
- Le milieu N de [KL] a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

Réponse b.

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AS}}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\boxed{\textbf{b.}\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Réponse b.

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\left\{\begin{array}{l c r} x & = & -1-t\\ y & = & t\\ z & = & -t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{l c r} x & = & -1+2t\\ y & = & 0\\ z & = & 1+2t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ $\boxed{\textbf{c.}\ \left\{\begin{array}{l c r} x & = & t\\ y & = & 0\\ z & = & 1+t\end{array}\right.\ (t \in \mathbb{R})}$ **d.** $\left\{\begin{array}{l c r} x & = & -1-t\\ y & = & 1+t\\ z & = & 1-t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

La droite (AS) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{AS}}\,(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$; la seule représentation qui convienne est la c.

Réponse c.

5. Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

a. $y+z-1=0$ $\boxed{\textbf{b.}\ x+y+z-1=0}$ **c.** $x-y+z=0$ **d.** $x+z-1=0$

On procède par élimination.

- Le plan d'équation $y+z-1=0$ ne contient pas C (1 ; 0 ; 0) ; on élimine **a.**
- Le plan d'équation $x-y+z=0$ ne contient pas S (0 ; 0 ; 1) ; on élimine **c.**
- Le plan d'équation $x+z-1=0$ ne contient pas B (0 ; 1 ; 0) ; on élimine **d.**

Réponse b.

Exercice au choix du candidat 5 points

Exercice A

Principaux domaines abordés : Suites numériques; raisonnement par récurrence; suites géométriques.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1$.

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{3}{4}u_0 + \dfrac{1}{4} \times 0 + 1 = \dfrac{3}{4} \times 1 + 1 = \dfrac{7}{4}$.

Pour $n = 1$, $u_1 = u_{1+1} = \dfrac{3}{4}u_1 + \dfrac{1}{4} \times 1 + 1 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{41}{16}$.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

2. a. La formule, étirée ensuite vers le bas, que l'on peut écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B est :
= 3/4 * B2 + 1/4 * A2 +1.

b. La suite (u_n) semble croissante.

3. a. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité**
  On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ (hypothèse de récurrence).

$$n \leqslant u_n \leqslant n+1 \iff \frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1)$$
$$\iff \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n$$
$$\iff n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant n + \frac{3}{4}$$
$$\iff n+1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant n + \frac{3}{4} + 1 \iff n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4}$$

  donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$.
  On a démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b. D'après la question précédente :

- Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ donc $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ d'où on tire $u_n \leqslant u_{n+1}$ ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, $n \leqslant u_n$; or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c. Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc pour tout $n > 0$, on a : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$ c'est-à-dire : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Pour tout n, $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \dfrac{3}{4}(v_n + n) - \dfrac{3}{4}n = \dfrac{3}{4}v_n + \dfrac{3}{4}n - \dfrac{3}{4}n = \dfrac{3}{4}v_n$

$v_0 = u_0 - 0 = 1$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

b. On en déduit que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Comme $u_n = v_n + n$, on a $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme ; convexité

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \dfrac{3}{x}$,
où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.

$f(x) = x\left(1 - 4\dfrac{\ln(x)}{x}\right) + 4 - \dfrac{3}{x}$

$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - 4\frac{\ln(x)}{x}\right) + 4 = +\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

$f'(x) = 1 + 0 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$

3. a. On cherche le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$:

$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

x	0		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		+	0	−	0	−	
x^2	0	+		+		+	
$f'(x)$	‖	+	0	−	0	+	

$f(1) = 1 + 4 - 4\ln(1) - \dfrac{3}{1} = 2$; $f(3) = 3 + 4 - 4\ln(3) - \dfrac{3}{3} = 6 - 4\ln(3) \approx 1{,}69$

On établit le tableau des variations de f en admettant que que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$:

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	0	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↘	$6 - 4\ln(3) \approx 1{,}61$	↗	$+\infty$

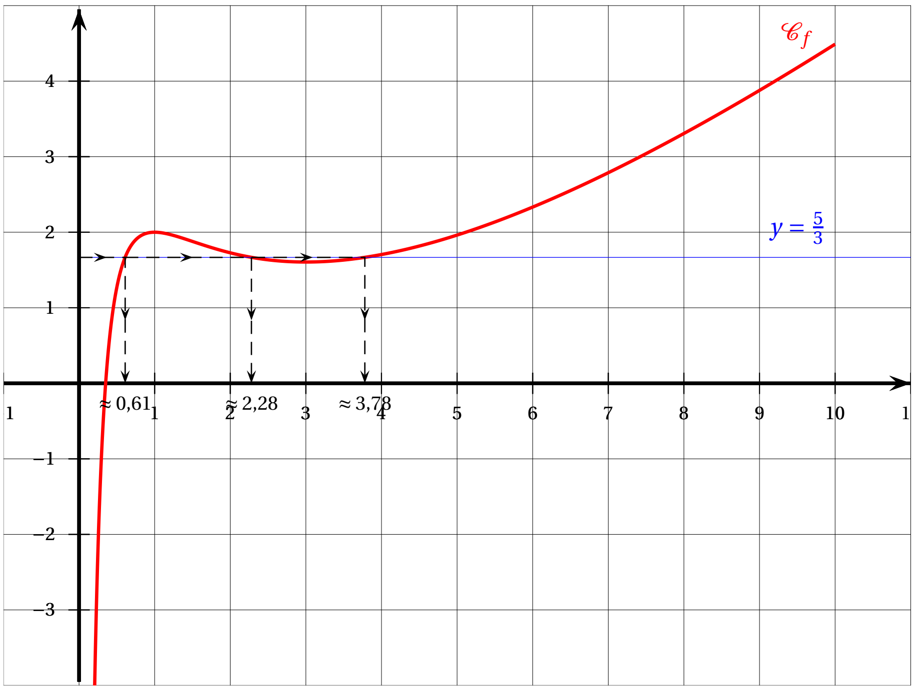
b. • $\dfrac{5}{3} \in]-\infty\,;\,2]$ donc l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

• $\dfrac{5}{3} \approx 1{,}67$ et $f(3) = 6 - 4\ln 3 \approx 1{,}61$ donc $\dfrac{5}{3} \in [6 - 4\ln 3\,;\,2]$, donc l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1\,;\,3[$.

• $\dfrac{5}{3} \in [6 - 4\ln 3\,;\,+\infty[$, donc $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

Conclusion : l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet donc trois solutions dans $]0\,;\,+\infty[$.

Voir cidessus les valeurs approchées des solutions.



4. Pour étudier la convexité de f, on détermine le signe de f'', la dérivée seconde de f.

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$ donc

$f''(x) = \dfrac{(2x-4)\times x^2 - (x^2 - 4x + 3)\times 2x}{x^4} = \dfrac{(2x^2 - 4x - 2x^2 + 8x - 6)\times x}{x^4} = \dfrac{4x-6}{x^3}$

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x-6$		$-$	0	$+$	
x^3	0	$+$		$+$	
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
	$\Vert$	f concave		f convexe	

La dérivée seconde s'annule et change de signe pour $x = \dfrac{3}{2}$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2} + 4 - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - \dfrac{3}{\frac{3}{2}} = \dfrac{11}{2} - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - 2 = \dfrac{7}{2} - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

La courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{7}{2} - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$.