

❧ Corrigé Baccalauréat Amérique du Nord Jour 1 18 mai 2022 ❧

**ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ**

Le sujet propose 4 exercices

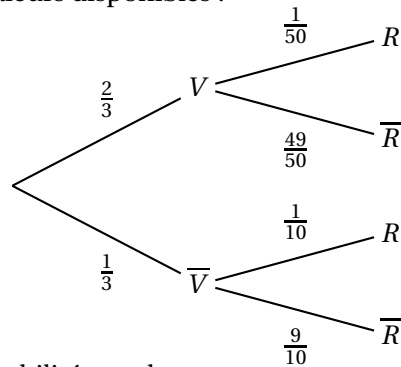
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

**EXERCICE 1 (7 points)**

**Thèmes : Probabilités**

**Partie A**

1. a. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



- b. D'après la formule des probabilités totales :

$$p(R) = p(R \cap V) + p(R \cap \bar{V}) = p_V(R) \times p(V) + p_{\bar{V}}(R) \times p(\bar{V}) = \frac{1}{50} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{150}$$

- c. On cherche la probabilité :  $p_R(V)$ .

$$\text{D'après la formule de Bayes, } p_R(V) = \frac{p(R \cap V)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{50} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{150}} = \frac{2}{7}.$$

2. a. Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 20 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles.  $X$  suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 20$  et  $p = \frac{2}{3}$  :  $X \sim \mathcal{B}\left(20; \frac{2}{3}\right)$

b.  $p(X = 10) = \binom{20}{10} \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{20-10} \approx 0,054.$

c.  $p(X \geq 10) = 1 - p(X < 10) = 1 - p(X \leq 9) \approx 0,962$

d. Calculons l'espérance  $E(X)$  de cette loi binomiale :  $E(X) = n \times p = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3} \approx 13,333$

En moyenne, il se rendra à la gare en vélo 13,33 jours par mois.

3. Calculons l'espérance de la loi de probabilité de  $T$  :

$$E(t) = 0,14 \times 10 + 0,13 \times 11 + 0,13 \times 12 + 0,12 \times 13 + 0,12 \times 14 + 0,11 \times 15 + 0,10 \times 16 + 0,08 \times 17 + 0,07 \times 18 = 13,5$$

Il mettra en moyenne 13 minutes et demie pour se rendre à la gare en voiture.

**EXERCICE 2 (7 points)****Thèmes : suites**

On considère la suite  $(T_n)$  définie par :  $T_0 = 180$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$

1. a. Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \geq 20$ .

*Initialisation* :  $T_0 = 180 \geq 20$ . L'initialisation est vérifiée.

*Hérédité* : Soit  $n \in \mathbb{N}$ , et supposons que  $T_n \geq 20$ . Montrons que  $T_{n+1} \geq 20$ .

$$T_n \geq 20 \iff 0,955 \times T_n \geq 0,955 \times 20 \iff 0,955T_n \geq 19,1$$

$\iff 0,955T_n + 0,9 \geq 19,1 + 0,9 \iff 0,955T_n + 0,9 \geq 20$ . Donc  $T_{n+1} \geq 20$ . L'hérédité est démontrée.

*Conclusion* : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang  $n$ , elle l'est aussi au rang  $n + 1$ . D'après l'axiome de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \geq 20$ .

- b.  $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} - T_n = 0,955 T_n + 0,9 - T_n = -0,045 T_n + 0,9 = -0,045 \left( T_n - \frac{0,9}{0,045} \right)$   
 $= -0,045(T_n - 20)$ .

Or d'après la question précédente,  $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \geq 20$  donc  $T_n - 20 \geq 0$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} - T_n \leq 0$ . La suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante.

- c. La suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante et minorée par 20. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite finie supérieure ou égale à 20.

2. On note  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = T_n - 20$ .

- a.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = T_{n+1} - 20 = 0,955 \times T_n + 0,9 - 20 = 0,955 T_n - 19,1 = 0,955 \left( T_n - \frac{19,1}{0,955} \right)$   
 $= 0,955(T_n - 20) = 0,955 u_n$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,955u_n$  donc la suite  $(u_n)$  est géométrique de raison 0,955 et de premier terme  $u_0 = T_0 - 20 = 160$ .

- b.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n = 160 \times 0,955^n$ .

De plus  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = T_n - 20$  donc  $T_n = u_n + 20 = 160 \times 0,955^n + 20$ .

- c.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,955^n = 0$  car  $0,955 \in ]-1; 1[$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 20$ .

- d.  $T_n \leq 120 \iff 160 \times 0,955^n + 20 \leq 120 \iff 160 \times 0,955^n \leq 120 - 20 \iff 160 \times 0,955^n \leq 100$   
 $\iff 0,955^n \leq \frac{100}{160} \iff 0,955^n \leq \frac{5}{8}$ .

Sachant que la fonction  $f : x \mapsto \ln(x)$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ , on obtient :

$$\ln(0,955^n) \leq \ln\left(\frac{5}{8}\right) \iff n \times \ln(0,955) \leq \ln\left(\frac{5}{8}\right). \text{ Or } \ln(0,955) < 0 \text{ donc,}$$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{\ln(0,955)}. \text{ À la calculatrice, } \frac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{\ln(0,955)} \approx 10,21 \text{ donc } n \geq 11.$$

3. a. Lorsque le gâteau est sorti du four, il va céder son énergie (sa chaleur) à l'extérieur (environnement ambiant). Sa masse étant très faible par rapport à celle de l'extérieur, il va diminuer sa température pour atteindre celle de l'extérieur, soit 20° C.

- b. La fonction Python décrite est un algorithme de seuil : on cherche à partir de quand, la température devient inférieure ou égale au seuil fixé (ici l'argument de la fonction *seuil()* qui est  $x$ ). La valeur renvoyée sera le premier entier vérifiant  $T_n \leq x$ .

*temp(120)* fournira le premier nombre entier  $n$  tel que  $T_n \leq 120$ , soit d'après la question précédente,  $n = 11$ . Dans le contexte de l'exercice, il faudra donc 11 minutes avant que la température du plat soit inférieure ou égale à 120° C

## EXERCICE 3 (7 points)

## Thèmes : géométrie dans l'espace

1. a. Les vecteurs  $\vec{JK}$  et  $\vec{JL}$  ont pour coordonnées :  $\vec{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$   $\vec{JL} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

Le produit scalaire de  $\vec{JK}$  et  $\vec{JL}$  :  $\vec{JK} \cdot \vec{JL} = (-1) \times (-4) + 2 \times (-2) + 0 \times (-3) = 4 - 4 = 0$   
 Les vecteurs  $\vec{JK}$  et  $\vec{JL}$  sont orthogonaux donc le triangle JKL est rectangle en J.

b.  $\mathcal{A}_{JKL} = \frac{JK \times JL}{2}$ .

$$JK = \|\vec{JK}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5} \text{ et } JL = \|\vec{JL}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$$

$$\text{Donc } \mathcal{A}_{JKL} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{19}}{2} = \frac{\sqrt{145}}{2} \text{ cm}^2.$$

- c. Le triangle JKL est rectangle en J donc en appliquant la formule de la tangente, on obtient :

$$\tan(\widehat{JKL}) = \frac{JL}{JK} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}. \text{ Donc } \widehat{JKL} = \arctan\left(\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}\right) \approx 67,5^\circ$$

2. a. Les vecteurs  $\vec{JK}$  et  $\vec{JL}$  ne sont pas colinéaires : il n'existe pas de réel  $k$  tel que  $\vec{JK} = k \times \vec{JL}$ .

$$\text{En effet le système } \begin{cases} -1 & = & k \times (-4) \\ 2 & = & k \times (-2) \\ 0 & = & k \times (-3) \end{cases} \text{ n'admet pas de solution.}$$

$(\vec{JK}, \vec{JL})$  est donc une base du plan (JKL).

Calculons :

$$\vec{n} \cdot \vec{JK} = 6 \times (-1) + 3 \times 2 + (-10) \times 0 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \vec{JL} = 6 \times (-4) + 3 \times (-2) + (-10) \times (-3) = 0.$$

Le vecteur  $\vec{n}$  est donc orthogonal aux  $\vec{JK}$  et  $\vec{JL}$ . C'est donc un vecteur normal au plan (JKL).

- b. Le plan (JKL) a pour équation cartésienne :  $ax + by + cz + d = 0$ , où  $(a ; b ; c)$  sont les coordonnées d'un vecteur normal au plan. En prenant comme vecteur normal le vecteur  $\vec{n}$ , on obtient : (JKL) :  $6x + 3y - 10z + d = 0$ .

Or  $J \in$  (JKL) donc  $12 + 0 - 10 + d = 0$  donc  $d = -2$ . Donc (JKL) a pour équation  $6x + 3y - 10z - 2 = 0$ .

3. a. La droite  $\Delta$  est normale au plan (JKL) donc admet comme vecteur directeur  $\vec{n}$ , normal à (JKL). elle passe par T(10 ; 9 ; -6) donc une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x & = & 10 + 6t \\ y & = & 9 + 3t \\ z & = & -6 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- b. Le projeté orthogonal H de T sur le plan (IJK) est l'unique point d'intersection de  $\Delta$  et (IJK). Ses coordonnées sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x = 10 + 6t \\ y = 9 + 3t \\ z = -6 - 10t \\ 6x + 3y - 10z - 2 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans la dernière équation, on obtient :

$$6(10 + 6t) + 3(9 + 3t) - 10(-6 - 10t) - 2 = 0 \iff 145t + 145 = 0 \iff t = -1$$

$$\text{Donc } x = 10 + 6 \times (-1) = 4, y = 9 + 3 \times (-1) = 6 \text{ et } z = -6 - 10 \times (-1) = 4$$

H a pour coordonnées (4 ; 6 ; 4)

- c.  $\mathcal{V}_{JKLT} = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h$ . La base est le triangle JKL et la hauteur est le segment  $[TH]$ . D'après les question précédentes :

$$\overrightarrow{TH} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ donc } TH = \left\| \overrightarrow{TH} \right\| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 10^2} = \sqrt{145}$$

$$\text{Donc } \mathcal{V}_{JKLT} = \frac{1}{3} \mathcal{B}_{JKL} \times TH = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{145}}{2} \times \sqrt{145} = \frac{145}{6} \text{ cm}^3.$$

**EXERCICE 3 (7 points)****Thèmes : fonction exponentielle**

$$1. \forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{1 + e^x}{1 + e^x} - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{2e^x}{1 + e^x} = \frac{2e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{2}{1 + e^{-x}}$$

**Affirmation 1 : Vraie**

$$2. g(x) = \frac{1}{2} \iff \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \iff 2e^x = e^x + 1 \iff e^x = 1 \iff x = 0$$

**Affirmation 2 : Vraie**

3. La fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \times -e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}.$$

L'équation d'une tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $a$  a pour équation  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ . Pour que l'axe des abscisses soit tangent à  $\mathcal{C}$ , il faut que la courbe  $\mathcal{C}$  admette une tangente d'équation  $y = 0$  (équation de l'axe des abscisses), donc il faut que  $f(a) = 0$  et  $f'(a) = 0$ . Sachant que  $\forall a \in \mathbb{R}, e^{-a} \neq 0$ ,

$$f(a) = 0 \iff a^2 e^{-a} = 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0.$$

$$f'(a) = 0 \iff (2a - a^2)e^{-a} = 0 \iff 2a - a^2 = 0 \iff a(2 - a) = 0 \iff a = 0 \text{ ou } a = 2.$$

Donc  $a = 0$ . Il n'existe donc qu'un seul point où l'axe des abscisses est tangent à  $\mathcal{C}$ .

**Affirmation 3 : Vraie**

4. La fonction  $h$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $\mathcal{C}_h$  sa courbe représentative.

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = e^x \times (1 - x^2) + e^x \times -2x = e^x (1 - x^2 - 2x) = (-x^2 - 2x + 1) e^x.$$

La fonction  $h'$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, h''(x) = (-2x - 2)e^x + e^x \times (-x^2 - 2x + 1) = e^x (-2x - 2 - x^2 - 2x + 1) = (-x^2 - 4x - 1) e^x$$

Si  $\mathcal{C}_h$  admet des points d'inflexions, alors  $h''(x)$  peut s'annuler et changer de signe. Or  $e^x > 0$  pour tout réel  $x$ , donc étudions le signe de  $-x^2 - 4x - 1$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$-x^2 - 4x - 1 \text{ s'annule pour } x_1 = -2 - \sqrt{3} \text{ et pour } x_2 = -2 + \sqrt{3} \text{ car } \Delta = 12.$$

Le trinôme du second degré s'annule donc deux fois et change donc aussi de signe.

**Affirmation 4 : Fausse**

$$5. \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{e^x + x} = \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{x}{e^x}}.$$

D'après les croissances comparées,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

**Affirmation 5 : Fausse**

$$6. 1 + e^{2x} \geq 2e^x \iff e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0 \iff (e^x - 1)^2 \geq 0.$$

Cette dernière inégalité est vraie pour tout réel  $x$ .

**Affirmation 6 : Vraie**