Le sujet comporte 13 pages numérotées de 1 à 13

EXERCICE I - (16 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu ci-dessous

Dans cet exercice, on note $a = \ln(1,05)$.

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $\quad f(x) = 16\,e^{a\,x} - x - 16$.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthogonal où l'unité sur l'axe (Ox) est 1 cm et l'unité sur l'axe (Oy) est 2 cm.

Partie A

I-A-1- Calculer $f'(x)$ en fonction de a.

I-A-2-a- Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ et donner sa solution x_0, en fonction de a.

I-A-2-b- Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près .

I-A-2-c- Donner une valeur approchée de $f(x_0)$ à 10^{-1} près.

I-A-3- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Justifier votre réponse.

I-A-4- Déterminer, en fonction de a, une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

I-A-5- Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

REPONSES A L'EXERCICE I

I-A-1- $f'(x) = 16\,a\,e^{ax} - 1$

I-A-2-a- Résolution de $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 16\,a\,e^{ax} - 1 = 0 \iff e^{ax} = \frac{1}{16a} \iff ax = -\,ln(16a) \iff x = -\,\frac{ln(16a)}{a}$$

$$x_0 = -\,\frac{ln(16a)}{a}$$

I-A-2-b- $x_0 \simeq 5,1$

I-A-2-c- $f(x_0) \simeq -\,0,6$

I-A-3- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad$ car $\quad$ on a : $f(x) = e^{ax}\left(16 - \dfrac{x}{e^{ax}}\right) - 16$

Comme $1,05 > 1$, $a = ln(1,05) > 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{ax} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{ax}} = 0$.

I-A-4- T_0 a pour équation : $\quad y = (16\,a - 1)\,x$

I-A-5-

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$	$16a - 1$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$f(x_0)$	↗	$+\infty$

EXERCICE I - (suite)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

Partie A (suite)

I-A-6-a- Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution strictement positive que l'on notera α.

I-A-6-b- Montrer qu'on a l'encadrement : $9 < \alpha < 10$.

I-A-7- Préciser alors le signe de $f(x)$ en fonction de x.

I-A-8- Tracer la courbe $\mathcal{C}$, la tangente T_0 et la tangente au point d'abscisse x_0.

Partie B

Une personne a loué un studio à partir du **1**er janvier **2000**.

Elle avait le choix entre deux contrats :

- Dans les deux cas, le loyer initial valait **2400** euros pour l'année **2000**.

- Avec le contrat n°**1**, le locataire acceptait que, chaque année, le loyer annuel augmente de **150** euros par rapport au loyer de l'année précédente.

- Avec le contrat n°**2**, le locataire acceptait que, chaque année, le loyer annuel augmente de **5%** par rapport au loyer de l'année précédente.

I-B-1- On note u_n le loyer payé en euros pour l'année $2000 + n$, lorsque le contrat n°**1** a été choisi.

I-B-1-a- Déterminer u_0, u_1 et u_2.

I-B-1-b- Déterminer u_n en fonction de n.

I-B-2- On note v_n le loyé payé en euros pour l'année $2000 + n$, lorsque le contrat n°**2** a été choisi.

I-B-2-a- Déterminer v_0, v_1 et v_2.

I-B-2-b- Déterminer v_n en fonction de n.

I-B-3-a- Justifier que, pour tout entier n, on a : $v_n - u_n = M \times f(n)$ où M est un entier que l'on précisera.

I-B-3-b- Indiquer, suivant les valeurs de n, lequel des deux loyers u_n ou v_n est le moins élevé.

I-B-4- Calculer, en fonction de n, la somme $U_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$ des loyers payés pour les années de 2000 à $2000 + n$, lorsque le contrat n°**1** a été choisi.

I-B-5- Calculer, en fonction de n, la somme $V_n = \sum_{p=0}^{n} v_p$ des loyers payés pour les années de 2000 à $2000 + n$, lorsque le contrat n°**2** a été choisi.

I-B-6- La personne a choisi le contrat n°**1** au **1**er janvier **2000** pour une durée de **13** ans (pour les années de **2000** à **2012**). A-t-elle fait le bon choix ? Justifier votre réponse.

REPONSES A L'EXERCICE I (suite)

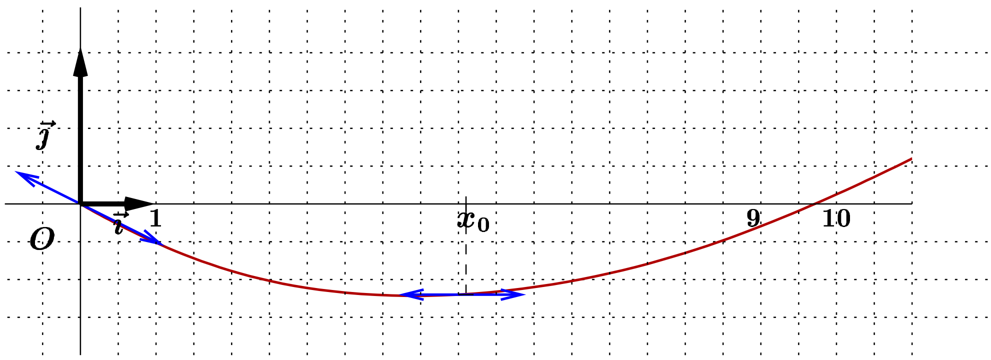
I-A-6-a- $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha > 0$ car : f est continue et strictement croissante sur $[x_0; +\infty[$. Comme $f(x_0) \simeq -0,6 < 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $0 \in]f(x_0); +\infty[$ donc il existe un unique réel $\alpha \in]x_0; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires) et on a $\alpha > x_0 > 0$.

I-A-6-b- $9 < \alpha < 10$ car $f(9) = -0,178... < 0$ et $f(10) = 0,06... > 0$ et $f(\alpha) = 0$. Par ailleurs, f est croissante sur $[9; 10]$, donc, comme $f(9) < f(\alpha) < f(10)$ alors $9 < \alpha < 10$.

I-A-7-

x	0		α		$+\infty$
signe de $f(x)$	0	$-$	0	$+$	

I-A-8-



I-B-1-a- $u_0 = 2400$ $\quad$ $u_1 = 2550$ $\quad$ $u_2 = 2700$

I-B-1-b- $u_n = 2400 + 150\,n$

I-B-2-a- $v_0 = 2400$ $\quad$ $v_1 = 2520$ $\quad$ $v_2 = 2646$

I-B-2-b- $v_n = 2400 \times 1,05^n$

I-B-3-a-
$$v_n - u_n = 2400 \times 1,05^n - 2400 - 150\,n = 2400 \times e^{n\,ln(1,05)} - 2400 - 150\,n$$
$$= 150\,(16\,e^{a\,n} - 16 - n) = 150\,f(n)$$
$M = 150$

I-B-3-b- Si $n \leq 9$ alors le loyer le moins élevé est v_n.

Si $n \geq 10$ alors le loyer le moins élevé est u_n.

I-B-4-
$$U_n = \sum_{p=0}^{n} u_p = \frac{2400 + 2400 + 150\,n}{2} \times (n+1) = 75\,n^2 + 2475\,n + 2400$$

I-B-5-
$$V_n = \sum_{p=0}^{n} v_p = 2400 \times \frac{1 - 1,05^{n+1}}{1 - 1,05} = 48000\,(1,05^{n+1} - 1)$$

I-B-6- A-t-elle fait le bon choix ? $U_{12} = 42900$ et $V_{12} = 42511,15...$ ainsi $U_{12} > V_{12}$ donc elle n'a pas fait le bon choix.

EXERCICE II - (6 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Soit ABC un triangle et soient les points A', B' et C' définis de la façon suivante :

A' est le symétrique de B par rapport à C,

B' est le symétrique de C par rapport à A,

C' est le symétrique de A par rapport à B.

Partie A

On donne le triangle ABC.

II-A-1- Construire les points A', B' et C' sur la figure donnée.

II-A-2- Déterminer deux réels b et c tels que A' soit le barycentre du système $\{(B,b)\ ;\ (C,c)\}$.

II-A-3- De même B' est le barycentre d'un système de deux points affectés de coefficients. Lequel ? Même question pour le point C'.

Partie B

Dans cette partie, on connaît le triangle $A'B'C'$.

On se demande comment retrouver le triangle ABC à partir du triangle $A'B'C'$.

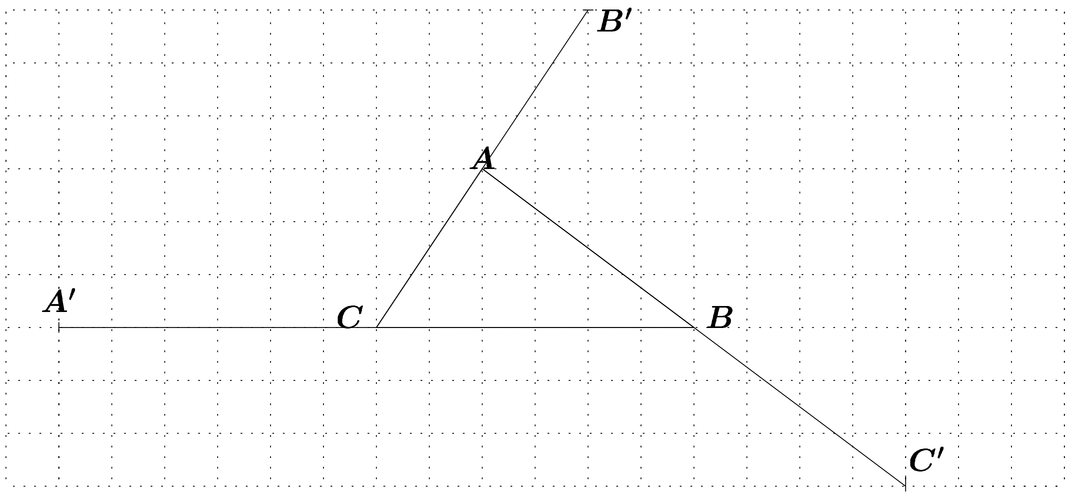
II- B-1- Justifier que le vecteur $2\,\overrightarrow{AA'} + 4\,\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$ est nul.

II- B-2- Déterminer les réels a', b' et c' tels que A soit le barycentre des points A', B' et C' affectés des coefficients a', b' et c'.

II- B-3- Construire A sur la figure donnée, en faisant les traits de construction en couleur.
En utilisant une autre couleur, construire ensuite les points B et C et tracer le triangle ABC.

REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1-



II-A-2- $b = 1$ $\quad$ $c = -2$

II-A-3- B' est barycentre de $\{(C, 1)\ ;\ (A, -2)\}$

C' est barycentre de $\{(A, 1)\ ;\ (B, -2)\}$

II-B-1- $2\,\overrightarrow{AA'} + 4\,\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{O}$ car :

Comme $\overrightarrow{AC'} = 2\,\overrightarrow{AB}$ car B est le milieu de $[AC']$,

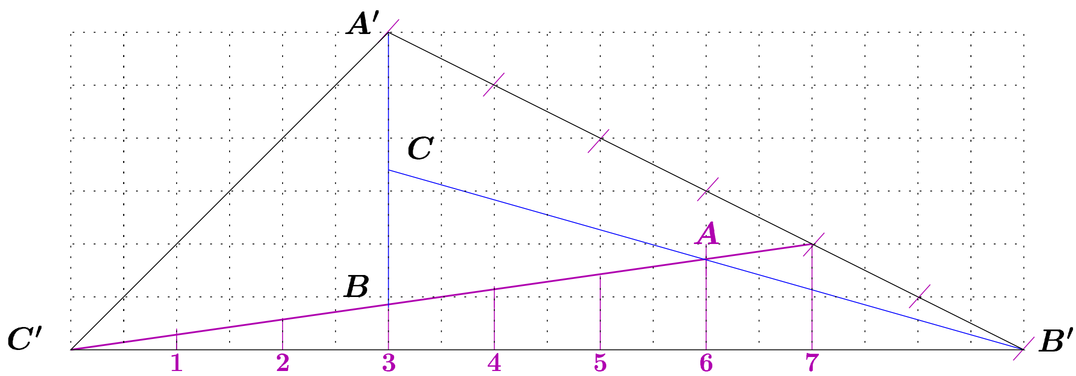
$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{CA}$ car A est le milieu de $[CB']$,

et $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{BC}$ car C est le milieu de $[A'B]$, alors :

$$\begin{aligned}2\,\overrightarrow{AA'} + 4\,\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} &= 2(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'}) + 4\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}\\ &= 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}\\ &= 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

II-B-2- $a' = 2$ $\quad$ $b' = 4$ $\quad$ $c' = 1$

II-B-3-



EXERCICE III - (11 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

Si E et F désignent deux événements quelconques, on note :
$\mathbb{P}(E)$, la probabilité de l'événement E,
$\mathbb{P}_F(E)$, la probabilité conditionnelle de E sachant que l'événement F est réalisé.

Partie A

Un forain propose le jeu suivant :

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, indiscernables au toucher.
Le joueur tire au hasard une boule de l'urne.

Si elle noire, il la remet dans l'urne et le forain ajoute une boule noire identique.
Le joueur recommence de la même façon jusqu'à ce qu'il tire la boule blanche.
Lorsqu'il obtient la boule blanche, le jeu s'arrête et le joueur gagne un lot.
Pour tout entier n non nul, on note les événements suivants :

B_n : "Le joueur a tiré la boule blanche au $n^{ième}$ tirage",

N_n : "Le joueur a tiré une boule noire au $n^{ième}$ tirage".

III-A-1- Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(B_1)$ et $\mathbb{P}(N_1)$.

III-A-2- Sachant qu'au premier tirage le joueur a tiré une boule noire, déterminer les probabilités : $\mathbb{P}_{N_1}(B_2)$ et $\mathbb{P}_{N_1}(N_2)$.

III-A-3- Déterminer les probabilités : $\mathbb{P}(N_1 \cap B_2)$ et $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2)$.

III-A-4- Sachant que le joueur a tiré une boule noire aux premier et deuxième tirages, déterminer les probabilités : $\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(B_3)$ et $\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(N_3)$.

III-A-5-a- Déterminer la probabilité P que le joueur gagne un lot au troisième tirage.

III-A-5-b- Déterminer la probabilité Q que le joueur tire trois fois de suite une boule noire.

III-A-6- Soit n un entier non nul. Sachant que le joueur a tiré n boules noires, déterminer les probabilités : $\mathbb{P}_{N_1 \cap \cdots \cap N_n}(B_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{N_1 \cap \cdots \cap N_n}(N_{n+1})$.

Partie B

Le forain propose ce même jeu au prix de **15** euros la partie - une partie donnant droit à **trois tirages au maximum** - et il offre alors au joueur :
10 euros s'il tire la boule blanche au premier tirage,
20 euros s'il l'obtient au deuxième tirage,
40 euros s'il l'obtient au troisième tirage.
Soit G la variable aléatoire représentant la somme remise au joueur à la fin de la partie.

III-B-1- Quelle est la probabilité que cette somme G soit nulle ?

III-B-2- Donner le tableau de la loi de G.

III-B-3- Déterminer l'espérance de gain $\mathbb{E}(G)$ du joueur.

III-B-4- Quelle devrait être le prix p de la partie pour qu'en moyenne le joueur ne perde pas d'argent à ce jeu ?

Le propriétaire du jeu désire attirer davantage de clients : le prix de la partie reste **15** euros mais le gain sera supérieur : a euros si le joueur obtient la boule blanche au premier tirage,
$2\,a$ euros s'il l'obtient au deuxième tirage,
$4\,a$ euros s'il l'obtient au troisième tirage.
On note G_a la variable aléatoire représentant la somme alors remise au joueur à la fin de la partie.

III-B-5-a- Calculer l'espérance de gain $\mathbb{E}(G_a)$ du joueur.

III-B-5-b- Quel doit être le montant maximum a_{max} de a pour que le propriétaire ne perde pas d'argent en moyenne ?

REPONSES A L'EXERCICE III

III-A-1-	$\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{1}{2}$	$\mathbb{P}(N_1) = \dfrac{1}{2}$
III-A-2-	$\mathbb{P}_{N_1}(B_2) = \dfrac{1}{3}$	$\mathbb{P}_{N_1}(N_2) = \dfrac{2}{3}$
III-A-3-	$\mathbb{P}(N_1 \cap B_2) = \dfrac{1}{6}$	$\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \dfrac{1}{3}$
III-A-4-	$\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(B_3) = \dfrac{1}{4}$	$\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \dfrac{3}{4}$
III-A-5-a-	$P = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = \mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(B_3) \times \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \dfrac{1}{12}$	
III-A-5-b-	$Q = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(N_3) \times \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \dfrac{1}{4}$	
III-A-6-	$\mathbb{P}_{N_1 \cap \cdots \cap N_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{n+2}$ $\mathbb{P}_{N_1 \cap \cdots \cap N_n}(N_{n+1}) = \dfrac{n+1}{n+2}$	
III-B-1-	$\mathbb{P}(G = 0) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \dfrac{1}{4}$	
III-B-2-	see table below	
III-B-3-	$\mathbb{E}(G) = \dfrac{35}{3}$	
III-B-4-	$p \leq \dfrac{35}{3}$ soit $p \leq 11,66...$ (euros)	
III-B-5-a-	$\mathbb{E}(G_a) = \dfrac{7}{6}a$	
III-B-5-b-	$a_{max} = \dfrac{90}{7} \simeq 12,85$ (euros)	

III-B-2- :

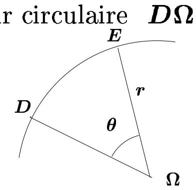
x_i	0	10	20	40
$\mathbb{P}(G = x_i)$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{12}$

EXERCICE IV - (15 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Premier rappel : On considère un disque de centre Ω et de rayon r.

L'aire du secteur circulaire $\widehat{D\Omega E}$ tel que l'angle $\widehat{D\Omega E}$ mesure θ radians est égale à :



$$\textit{Aire du secteur circulaire } \widehat{D\Omega E} = \frac{\theta}{2} \times r^2.$$

Deuxième rappel : Pour tous les réels a et b, on a :

$$\cos(a + b) = \cos a \, \cos b - \sin a \, \sin b \qquad \sin(a + b) = \sin a \, \cos b + \sin b \, \cos a.$$

Partie A

Soit α un réel.

IV-A-1- Exprimer $\cos(2\alpha)$ et $\sin(2\alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$ et de $\sin\alpha$.

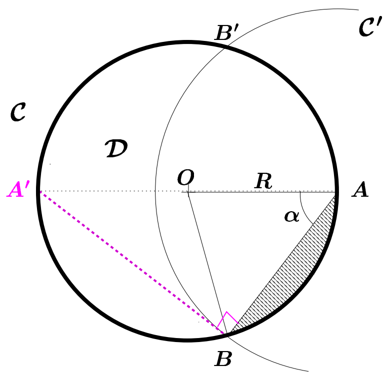
IV-A-2- Justifier que : $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$.

Partie B

On considère un disque $\mathcal{D}$ de centre O et de rayon R délimité par le cercle $\mathcal{C}$. Soit A un point du cercle $\mathcal{C}$.

Le but de l'exercice est de tracer un cercle $\mathcal{C}'$ de centre A qui partage le disque $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire.

On désigne par B et B' les points d'intersection des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et on désigne par α la mesure en radian, comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, de l'angle $\widehat{OAB}$.



IV-B-1- Montrer que le rayon AB du cercle $\mathcal{C}'$ vérifie : $AB = 2R\cos\alpha$.

IV-B-2-a- Déterminer une mesure en radian de l'angle $\widehat{AOB}$, en fonction de α.

IV-B-2-b- En déduire l'aire, en unités d'aires, du secteur circulaire $\widehat{AOB}$ du disque $\mathcal{D}$, en fonction de α et de R.

IV-B-3-a- Calculer l'aire, en unités d'aires, du triangle OAB, en fonction de α et de R.

IV-B-3-b- Déterminer l'aire, en unités d'aires, de la partie grisée de la figure ci-dessus, en fonction de α et de R.

IV-B-4- On désigne par $\mathcal{D}'$ le disque de centre A et de rayon AB, délimité par le cercle $\mathcal{C}'$.

Calculer, en fonction de α et de R, l'aire du secteur ciculaire $\widehat{BAB'}$ du disque $\mathcal{D}'$.

IV-B-5- En déduire l'aire commune $\mathcal{A}_{com}$ aux deux disques $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, en fonction de R et de α.

IV-B-6- A l'aide des questions **IV-A-1-** et **IV-A-2-**, montrer que $\mathcal{C}'$ partage le disque $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire si et seulement si α vérifie :

$$2\alpha\cos(2\alpha) - \sin(2\alpha) + \frac{\pi}{2} = 0.$$

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-A-1-	$\cos(2\,\alpha) = \cos^2\,\alpha - \sin^2\,\alpha$ $\sin(2\,\alpha) = 2\,\sin\alpha\,\cos\alpha$
IV-A-2-	$\cos(2\,\alpha) = 2\,\cos^2\,\alpha\,-\,1$ car : Comme $\sin^2\,\alpha = 1 - \cos^2\,\alpha$ et d'après la question **IV-A-1-**, on a : $\cos(2\alpha) = \cos^2\,\alpha - (1 - \cos^2\,\alpha) = 2\,\cos^2\,\alpha - 1$.
IV-B-1-	$AB = 2R\,\cos\,\alpha$ car : Soit A' le point du cercle $\mathcal{C}$, diamétralement opposé à A. Le triangle ABA' est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ et $[AA']$ est un diamètre de $\mathcal{C}$ donc le triangle ABA' est rectangle en B. On a alors : $\cos\alpha = \dfrac{AB}{AA'} = \dfrac{AB}{2\,R}$ donc $AB = 2\,R\,\cos\alpha$.
IV-B-2-a-	$mes(\widehat{AOB}) = \pi - 2\,\alpha$
IV-B-2-b-	Aire du secteur $\widehat{AOB} = \left(\dfrac{\pi - 2\,\alpha}{2}\right) R^2$
IV-B-3-a-	Aire du triangle $OAB = R^2\,\sin\alpha\,\cos\alpha = \dfrac{R^2\,\sin(2\,\alpha)}{2}$
IV-B-3-b-	$\mathcal{A}_{partie\ grisée} = R^2\left(\dfrac{\pi - 2\,\alpha - \sin(2\,\alpha)}{2}\right)$
IV-B-4-	Aire du secteur $\widehat{BAB'} = \alpha\,AB^2 = 4\,R^2\,\alpha\,\cos^2\,\alpha$
IV-B-5-	$\mathcal{A}_{com} = R^2\left[\pi - 2\,\alpha - \sin(2\,\alpha) + 4\,\alpha\,\cos^2\,\alpha\right]$
IV-B-6-	$2\,\alpha\,\cos(2\,\alpha) - \sin(2\,\alpha) + \dfrac{\pi}{2} = 0$ car : $\mathcal{A}_{com} = \dfrac{1}{2}$ Aire de $\mathcal{D} \iff R^2\,\left[\pi - 2\,\alpha - \sin(2\,\alpha) + 4\,\alpha\,\cos^2\,\alpha\right) = \dfrac{\pi}{2} \times R^2$ $\iff 4\,\alpha\,\cos^2\alpha - 2\,\alpha - \sin(2\,\alpha) + \dfrac{\pi}{2} = 0$ $\iff 2\,\alpha\left(2\,\cos^2\alpha - 1\right) - \sin(2\,\alpha) + \dfrac{\pi}{2} = 0$ $\iff 2\,\alpha\,\cos(2\,\alpha) - \sin(2\,\alpha) + \dfrac{\pi}{2} = 0$

EXERCICE IV - (suite)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 11

La partie C peut être traitée indépendamment du reste de l'exercice.

Partie C

On considère la fonction g définie sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$g(x) = 2\,x\,\cos(2\,x) - \sin(2\,x) + \frac{\pi}{2}$$

IV-C-1- Déterminer $g'(x)$.

IV-C-2- Résoudre dans $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $g'(x) = 0$.

IV-C-3-a- Etudier le signe de $g'(x)$ sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$. Justifier la réponse.

IV-C-3-b- Dresser le tableau de variation de g sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$. On précisera $g(0)$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

IV-C-4- En déduire l'existence d'un unique réel α_0 de $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ solution de $g(x) = 0$.

IV-C-5- Déterminer un encadrement de α_0 d'amplitude 10^{-2}.

Partie D

Soit un disque $\mathcal{D}$ de rayon $R = 3$ cm, délimité par un cercle $\mathcal{C}$.

Soit A un point de $\mathcal{C}$.

On considère le cercle $\mathcal{C}'$ de centre A et de rayon r qui partage le disque $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire.

IV-D-1-a- Donner la valeur exacte de r.

IV-D-1-b- Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de r.

IV-D-2- Tracer le cercle $\mathcal{C}'$.

REPONSES A L'EXERCICE IV (suite)

IV-C-1- $g'(x) = 2\cos(2x) - 4x\sin(2x) - 2\cos(2x) = -4x\sin(2x)$

IV-C-2- Résolution de $g'(x) = 0$

$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow -4x\sin(2x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ ou } \sin(2x) = 0$

Donc $g'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{\pi}{2}$

IV-C-3-a- Etude du signe de $g'(x)$:

Pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $-4x \leq 0$ et $2x \in [0; \pi]$ donc $\sin(2x) \geq 0$.

D'où pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $g'(x) \leq 0$.

IV-C-3-b-

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$
$g'(x)$	0	$-$	0
$g(x)$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\dfrac{\pi}{2}$

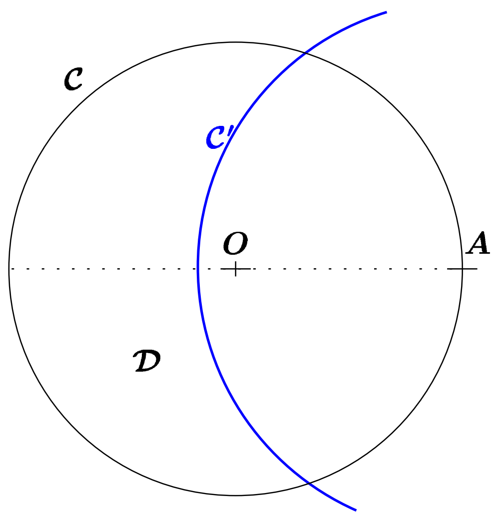
IV-C-4- $g(x) = 0$ admet une unique solution α_0 car : g est continue et strictement décroissante de $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Comme $0 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, il existe un unique réel α_0 dans $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $g(\alpha_0) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires).

IV-C-5- $0,95 < \alpha_0 < 0,96$

IV-D-1-a- $r = 2R\cos\alpha_0 = 6\cos\alpha_0$

IV-D-1-b- $r \simeq 6\cos(0,95) \simeq 3,5$

IV-D-2-



EXERCICE V - (12 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 13

On se place dans le plan complexe rapporté à un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé.

On dit qu'une fonction f définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est **involutive** si, pour tout complexe z de $\mathbb{C}$, on a :

$$(f \circ f)(z) = z$$

où $f \circ f$ désigne la fonction composée de f avec f.

Dans tout cet exercice, si z désigne un complexe, on notera $\bar{z}$ son complexe conjugué.

Partie A

Soient A et B deux nombres réels.

On considère la fonction F définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par : $F(z) = Az + B\bar{z}$.

V-A-1- Calculer $F(1)$ et $F(i)$.

V-A-2- Supposons que, pour tout complexe z, on a : $F(z) = 0$.
Montrer que l'on a alors : $A = B = 0$.

V-A-3- Déterminer A et B pour que, pour tout complexe z, on ait : $F(z) = z$.

Partie B

Soient a et b deux nombres réels.

On considère la fonction $f_{a,b}$ définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par : $f_{a,b}(z) = az + b\bar{z}$.

V-B-1- Exprimer, pour tout complexe z, $(f_{a,b} \circ f_{a,b})(z)$.

V-B-2- La fonction $f_{a,b}$ est involutive si et seulement si a et b vérifient un système de deux équations. Donner ce système.

V-B-3- Déterminer toutes les fonctions $f_{a,b}$ involutives.

Partie C

On considère dans cette partie, la fonction g définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$g(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}\,\bar{z} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,\bar{z}.$$

V-C-1- La fonction g est-elle involutive ? Justifier votre réponse.

Soit M un point quelconque du plan, d'affixe $z = x + iy$.

On considère le point M' d'affixe $z' = x' + i\,y'$ tel que : $z' = g(z)$.

V-C-2- Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

V-C-3-a- Donner le système des 2 équations que doivent vérifier x et y pour que $M' = M$.

V-C-3-b- On note Δ l'ensemble des points M du plan tels que $M' = M$.

Justifier que Δ est la droite d'équation : $y = (\sqrt{2} - 1)\,x$.

Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de cette droite.

V-C-4- Montrer que, pour tout point M du plan, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

V-C-5-a- Déterminer les coordonnées x_I et y_I du milieu I du segment $[MM']$.

V-C-5-b- Montrer que I appartient à Δ.

V-C-6- Par quelle transformation géométrique simple le point M' se déduit-il du point M ?

REPONSES A L'EXERCICE V

V-A-1-	$F(1) = A + B$ $\qquad\qquad$ $F(i) = (A - B)\, i$
V-A-2-	$A = B = 0$ $\quad$ car : $\left\{ \begin{array}{l} F(1) = 0 \\ F(i) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} A + B = 0 \\ (A - B)\, i = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array} \right.$
V-A-3-	$A = 1$ $\qquad\qquad$ $B = 0$
V-B-1-	$(f_{a,b} \circ f_{a,b})(z) = a\,(az + b\bar{z}) + b\,(a\bar{z} + bz) = (a^2 + b^2)\, z + 2\, a\, b\, \bar{z}$
V-B-2-	$f_{a,b}$ est involutive si et seulement si a et b vérifient $\left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ 2\, a\, b\ = 0 \end{array} \right.$
V-B-3-	Les fonctions $f_{a,b}$ involutives sont : $f_{0,1}\ : z \to \bar{z}$, $\quad f_{0,-1}\ : z \to -\,\bar{z}$, $\quad f_{1,0}\ : z \to z$ $\quad$ et $\quad f_{-1,0}\ : z \to -\,z$.
V-C-1-	g est-elle involutive ? oui Justification : $g \circ g(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}\, \overline{\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\,\bar{z}\right)} = e^{i\frac{\pi}{4}}\, e^{-\,i\frac{\pi}{4}}\, z = \ z$
V-C-2-	$x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x + y)$ $\qquad\qquad$ $y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x - y)$
V-C-3-a-	$M = M'$ $\quad$ si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x + y) = x \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x - y) = y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{2} - 2)\, x + \sqrt{2}\, y = 0 \\ \sqrt{2}\, x - (\sqrt{2} + 2)\, y = 0 \end{array} \right.$
V-C-3-b-	$\Delta : y = (\sqrt{2} - 1)\, x$ $\quad$ car $\quad$ d'après la question **V-C-3-a-**, on a : $M = M' \iff \left\{ \begin{array}{l} (1 - \sqrt{2})\, x + y = 0 \\ x - (1 + \sqrt{2})\, y = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = (\sqrt{2} - 1)\, x \\ y = \dfrac{1}{1 + \sqrt{2}}\, x \end{array} \right.$ et $\quad \dfrac{1}{1 + \sqrt{2}} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{\left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right)} == \dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \sqrt{2} - 1$. $\vec{u}$ a pour coordonnées $\left(1\ ,\ \sqrt{2} - 1\right)$.
V-C-4-	Pour tout point M du plan, $\quad \overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$ $\quad$ car : $\overrightarrow{MM'} . \vec{u} = (x' - x) + (\sqrt{2} - 1)(y' - y)$ $= \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x + y) - x \right) + (\sqrt{2} - 1) \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x - y) - y \right)$ $= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \left[(1 - \sqrt{2})\, x + y + (\sqrt{2} - 1)\, x - y \right] = 0$
V-C-5-a-	$x_I = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \left((1 + \sqrt{2})\, x + y \right)$ $\qquad\qquad$ $y_I = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \left(x + (\sqrt{2} - 1)\, y \right)$
V-C-5-b-	$I \in \Delta$ $\quad$ car : $(\sqrt{2} - 1)\, x_I = (\sqrt{2} - 1) \dfrac{\sqrt{2}}{4} \left((1 + \sqrt{2})\, x + y \right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \left(x + (\sqrt{2} - 1)\, y \right) = y_I$
V-C-6-	M' se déduit de M par la symétrie orthogonale par rapport à $\boldsymbol{\Delta}$.

Le sujet comporte 15 pages numérotées de 1 à 15

EXERCICE I - (12 points)

Donner les réponses à cet exercice dans les cadres prévus ci-dessous

Partie A

On s'intéresse à la production d'un arbre fruitier donné.
On sait que lors de l'année **2000**, l'arbre a donné une bonne récolte.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note :

- B_n l'événement "l'arbre donne une bonne récolte durant l'année $2000 + n$",
- M_n l'événement "l'arbre donne une mauvaise récolte durant l'année $2000 + n$".

Si lors de l'année $2000 + n$ l'arbre donne une bonne récolte, l'année suivante, il donne une bonne récolte avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et il en donne une mauvaise avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Si par contre lors de l'année $2000 + n$ l'arbre donne une mauvaise récolte, l'année suivante, il donne une bonne récolte avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et il en donne une mauvaise avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

I-A-1- On note $\mathbb{P}_B(A)$ la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.
Donner, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les probabilités conditionnelles suivantes :

$$\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}), \qquad \mathbb{P}_{M_n}(B_{n+1}), \qquad \mathbb{P}_{B_n}(M_{n+1}), \qquad \mathbb{P}_{M_n}(M_{n+1}).$$

I-A-2- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité de l'événement B_n et q_n la probabilité de l'événement M_n, c'est à dire : $p_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $q_n = \mathbb{P}(M_n)$.

I-A-2-a- Donner p_0 et q_0.

I-A-2-b- Donner pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $p_n + q_n$.

I-A-3-a- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, déterminer les probabilités $\mathbb{P}(B_{n+1} \cap B_n)$ et $\mathbb{P}(B_{n+1} \cap M_n)$ en fonction de p_n et de q_n.

REPONSES A L'EXERCICE I

I-A-1-	$\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3}$ $\mathbb{P}_{B_n}(M_{n+1}) = \frac{2}{3}$	$\mathbb{P}_{M_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}$ $\mathbb{P}_{M_n}(M_{n+1}) = \frac{1}{3}$
I-A-2-a-	$p_0 = 1$	$q_0 = 0$
I-A-2-b	$p_n + q_n = 1$	
I-A-3-a-	$\mathbb{P}(B_{n+1} \cap B_n) = \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) \times \mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{3}\, p_n$ $\mathbb{P}(B_{n+1} \cap M_n) = \mathbb{P}_{M_n}(B_{n+1}) \times \mathbb{P}(M_n) = \frac{2}{3}\, q_n$	

EXERCICE I (Suite)

Donner les réponses à cet exercice dans les cadres prévus à la page 3

Partie A (suite)

I-A-3-b- Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier la relation : $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n$.

I-A-3-c- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, déterminer les probabilités $\mathbb{P}(M_{n+1} \cap B_n)$ et $\mathbb{P}(M_{n+1} \cap M_n)$, en fonction de p_n et de q_n.

En déduire q_{n+1} en fonction de p_n et de q_n.

I-A-4- On pose : $u_n = p_n - q_n$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

I-A-4-a- On montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison b et de premier terme u_0. Préciser b et u_0.

I-A-4-b- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, expliciter u_n en fonction de n.

I-A-5-a- Déduire des questions **I-A-2-b-** et **I-A-4-**, les expressions de p_n et de q_n en fonction de n.

I-A-5-b- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$.

Partie B

L'exploitant agricole réalise en vendant la récolte de l'arbre fruitier considéré en première partie, un bénéfice qui est de :

- **200** euros si la récolte est bonne,
- **10** euros si la récolte est mauvaise.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note G_n la variable aléatoire représentant le gain en euros de l'agriculteur pour cet arbre lors de l'année $\mathbf{2000} + n$.

I-B-1- Compléter le tableau donnant la loi de G_n.

I-B-2- Soit $\mathbb{E}(G_n)$ l'espérance de G_n. Justifier que $\mathbb{E}(G_n) = 105 + 95\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

I-B-3- Quelle est la somme totale S des gains que peut espérer obtenir l'agriculteur, pour les dix premières années de récolte sur cet arbre, de **2000** à **2009** ?
Donner la valeur exacte de S avec le détail du calcul, puis donner une valeur approchée à un euro près.

I-B-4- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(G_n)$. Justifier le résultat.

REPONSES A L'EXERCICE I (Suite)

I-A-3-b-	$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n$ car $p_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} \cap B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} \cap M_n) = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n$
I-A-3-c-	$\mathbb{P}(M_{n+1} \cap B_n) = \mathbb{P}_{B_n}(M_{n+1}) \times \mathbb{P}(B_n) = \frac{2}{3}\, p_n$ $\mathbb{P}(M_{n+1} \cap M_n) = \mathbb{P}_{M_n}(M_{n+1}) \times \mathbb{P}(M_n) = \frac{1}{3}\, q_n$ $q_{n+1} = \mathbb{P}(M_{n+1} \cap B_n) + \mathbb{P}(M_{n+1} \cap M_n) = \frac{2}{3}\, p_n + \frac{1}{3}\, q_n$
I-A-4-a-	Comme $u_{n+1} = p_{n+1} - q_{n+1} = -\frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n = -\frac{1}{3}(p_n - q_n) = -\frac{1}{3}u_n$ $b = -\frac{1}{3}$ $u_0 = p_0 - q_0 = 1$
I-A-4-b-	$u_n = u_0\, b^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
I-A-5-a-	Comme $p_n + q_n = 1$ et $p_n - q_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ $p_n = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$ $q_n = \frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$
I-A-5-b-	$\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = \frac{1}{2}$
I-B-1-	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline x & 200 & 10 \\ \hline \mathbb{P}(G_n = x) & p_n & q_n \\ \hline \end{array}$
I-B-2-	$\mathbb{E}(G_n) = 105 + 95\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ car $\mathbb{E}(G_n) = 200p_n + 10q_n$ Donc $\mathbb{E}(G_n) = 100\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 5\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) = 105 + 95\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$
I-B-3-	$S = \mathbb{E}(G_0) + \mathbb{E}(G_1) + \cdots + \mathbb{E}(G_9)$ $= 105 \times 10 + 95\left[1 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^9\right]$ $= 105 \times 10 + 95\,\frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{10}}{1 + \frac{1}{3}} = 1050 + \frac{95 \times 3}{4}\left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right)$ $S \simeq 1121$
I-B-4-	$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(G_n) = 105$ car $\left\|-\frac{1}{3}\right\| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$

EXERCICE II - (10 points)

Donner les réponses à cet exercice dans les cadres prévus à la page 5

On considère l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On appelle vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$ de l'espace tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$.

Soit le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $2x + 3y - z = 0$ et le plan $\mathcal{P}_2$ passant par le point $A(0, 2, 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}_2(4, 2, -1)$.

II-1- Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}_2$.

II-2-a- Donner un vecteur $\vec{n}_1$ normal à $\mathcal{P}_1$.
En utilisant les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$, justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

II-2-b- Déterminer un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$ intersection de $\mathcal{P}_1$ et de $\mathcal{P}_2$.

II-3- On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $-2x + y = 0$.

II-3-a- Donner un vecteur $\vec{n}$ normal au plan $\mathcal{P}$.

II-3-b- Montrer que $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

II-3-c- En utilisant les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$, justifier que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ sont sécants ainsi que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_2$.

II-4-a- Montrer que les points O et $A_1(1, 2, 8)$ appartiennent aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$.

II-4-b- En déduire un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}_1$, intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$.

II-5-a- Montrer que $A_2(0, 0, -3)$ appartient aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_2$.

II-5-b- Soit le vecteur $\vec{v}$ $(1, 2, 8)$. Déterminer les produits scalaires $\vec{v}.\vec{n}$ et $\vec{v}.\vec{n_2}$.

II-5-c- Donner un point et un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$, intersection entre les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_2$.

II-5-d- Quelle propriété vérifient les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}$? Justifier la réponse.

II-6- On considère le point $M(2, -1, -1)$.
On désigne par $H(a, b, c)$ la projection orthogonale du point M sur le plan $\mathcal{P}$.

II-6-a- Que peut on dire des vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\vec{n}$?

II-6-b- Quelles relations en déduire pour les coordonnées a, b et c de H ?

II-6-c- Déterminer les coordonnées a, b et c de H.

REPONSES A L'EXERCICE II

II-1-	Equation de $\mathcal{P}_2$: $\boldsymbol{4x + 2y - z = 3}$
II-2-a-	$\vec{n_1}\ (2\,,\,3\,,\,-1)$ $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants car $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires.
II-2-b-	$M(x,y,z) \in \mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \iff \begin{cases} 4x+2y-z=3 \\ 2x+3y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = 2x-3 \\ z = 8x-9 \end{cases}.$ d'où $E\ (0\,,\,-3\,,\,-9)$ et $\vec{u}\ (1\,,\,2\,,\,8)$
II-3-a-	$\vec{n}\ (-2\,,\,1\,,\,0)$
II-3-b-	$\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ car $\vec{n}.\vec{u} = -2+2+0=0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$.
II-3-c-	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ sont sécants car $\vec{n}$ et $\vec{n_1}$ ne sont pas colinéaires. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants car $\vec{n}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires.
II-4-a-	$O \in \mathcal{P}$ car $-2\times 0 + 0 = 0$ $\quad$ $O \in \mathcal{P}_1$ car $2\times 0 + 3\times 0 - 0 = 0$ $A_1 \in \mathcal{P}$ car $-2\times 1 + 2 = 0$ $\quad$ $A_1 \in \mathcal{P}_1$ car $2\times 1 + 3\times 2 - 8 = 0$
II-4-b-	Système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}_1$: $M(x,y,z) \in \mathcal{D}_1 = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_1 \iff \begin{cases} -2x+y=0 \\ 2x+3y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = 2x \\ z = 8x \end{cases}$
II-5-a-	$A_2 \in \mathcal{P}$ car $-2\times 0 + 0 = 0$ $\quad$ $A_2 \in \mathcal{P}_2$ car $4\times 0 + 2\times 0 - (-3) = 3$
II-5-b-	$\vec{v}.\vec{n} = -2+2+0 = 0$ $\quad$ $\vec{v}.\vec{n_2} = 4+4-8 = 0$
II-5-c-	Point de $\mathcal{D}_2$: $A_2\ (0\,,\,0\,,\,-3)$ $\quad$ Vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$: $\vec{u_2}\ (1\,,\,2\,,\,8)$.
II-5-d-	$\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles. Justification : Elles ont le même vecteur directeur de coordonnées $(1,2,8)$.
II-6-a-	$\overrightarrow{MH}\ (a-2\,,\ b+1\,,\ c+1)$ et $\vec{n}\ (-2\,,\ 1\,,\ 0)$ sont colinéaires.
II-6-b-	a, b, c vérifient les relations : D'après la question **II-6-a-**, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} a = 2-2k \\ b = -1+k \\ c = -1 \end{cases}$ $H \in \mathcal{P}$ d'où $-2a+b=0$ et donc $k=1$.
II-6-c-	$a = 0$ $\quad$ $b = 0$ $\quad$ $c = -1$

EXERCICE III - (16 points)

Donner les réponses à cette partie d'exercice dans les cadres prévus à la page 7

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans $\mathcal{P}$.

Partie A

Dans cette partie, on étudie la fonction f_n dans deux cas particuliers : $n = 0$ et $n = 1$.

III-A-1- Ecrire les expressions $f_0(x)$ et $f_1(x)$.

III-A-2-a- Calculer $\lim_{x\to+\infty} f_0(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f_0(x)$.

III-A-2-b- Préciser les équations des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$ à la courbe représentative $\mathcal{C}_0$ de f_0.

III-A-3-a- Calculer $f_0'(x)$ où f_0' est la dérivée de f_0.
Dresser le tableau de variation de f_0.

III-A-3-b- Déterminer une équation de la tangente T_I à $\mathcal{C}_0$, au point $I\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

III-A-4- Tracer la courbe $\mathcal{C}_0$, ses asymptotes et la tangente T_I.

III-A-5-a- Déterminer le réel a tel que, pour tout réel x,on ait : $f_1(x) - f_0(-x) = a$.
On donnera le détail du calcul.

III-A-5-b- En déduire la transformation géométrique simple par laquelle la courbe $\mathcal{C}_1$ représentative de f_1 se déduit de $\mathcal{C}_0$.

III-A-5-c- Tracer alors en couleur $\mathcal{C}_1$ sur la figure de la question **III-A-4-**.

REPONSES A L'EXERCICE III Partie A

III-A-1- $f_0(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ $\qquad$ $f_1(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

III-A-2-a- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = 0$

III-A-2-b- Equations des asymptotes à $\mathcal{C}_0$:

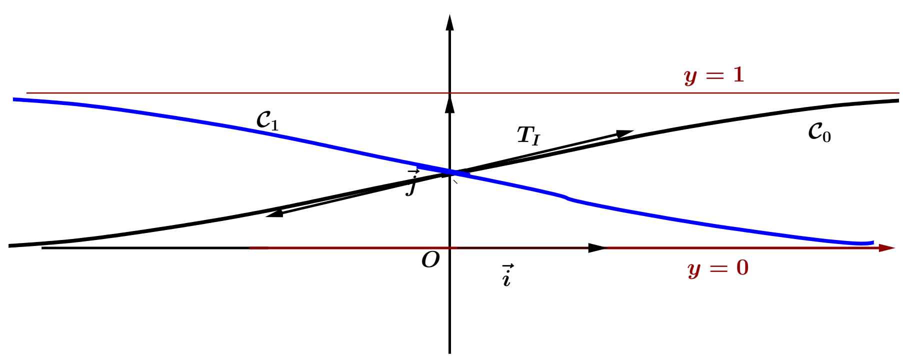
$y = 1$ au voisinage de $+\infty$ et $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.

III-A-3-a- $f_0'(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	
$f_0(x)$	0	$\nearrow$	1

III-A-3-b- Equation de T_I : $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$

III-A-4-



III-A-5-a- $a = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_1(x) - f_0(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{1}{1+e^{x}} = \frac{e^{-x}+1-1-e^{-x}}{(1+e^{-x})(1+e^{x})} = 0.$$

III-A-5-b- $\mathcal{C}_1$ se déduit de $\mathcal{C}_0$ par la symétrie orthogonale d'axe (Oy).

III-A-5-c- Voir figure de **III-A-4-**

EXERCICE III (Suite)

Donner les réponses à cette partie d'exercice dans les cadres prévus à la page 9

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

III-B-1-a- Justifier que $u_0 + u_1 = 1$ en donnant le détail du calcul.

III-B-1-b- Calculer u_1. On donnera le détail du calcul.

III-B-2-a- Soit n un entier non nul. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}dx$.
On donnera le détail du calcul.

III-B-2-b- Justifier que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$$

III-B-3-a- Soit n un entier naturel quelconque et x un réel de $[0, 1]$.
Quel est le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$? Justifier la réponse.

III-B-3-b- En déduire alors le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

III-B-4- Justifier que pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$.

III-B-5- Expliquer pourquoi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

III-B-6- On note l la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

III-B-6-a- Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - e^{-n}}{n}$. Justifier le résultat.

III-B-6-b- En déduire l. Justifier le résultat.

REPONSES A L'EXERCICE III (suite) Partie B

III-B-1-a-	$u_0 + u_1 = 1$ car $u_0 + u_1 = \int_0^1 f_0(x)dx + \int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 (f_0(x) + f_1(x))dx$ $= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 1dx = 1.$
III-B-1-b-	Calcul de u_1 : $u_1 = \int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \Big[-ln(1+e^{-x})\Big]_0^1 = -ln(1+e^{-1}) + ln2$
III-B-2-a-	Calcul de I : $I = \int_0^1 e^{-nx}dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-n}}{n}$
III-B-2-b-	$u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$ car pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_{n+1} + u_n = \int_0^1 (f_{n+1}(x) + f_n(x))dx = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x} + e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$ $= \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 e^{-nx}dx = I = \frac{1-e^{-n}}{n}.$
III-B-3-a-	$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^{-(n+1)x} - e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ est négatif car le dénominateur $1+e^{-x}$ est strictement positif et le numérateur $e^{-(n+1)x} - e^{-nx}$ est strictement négatif car la fonction $X \rightarrow e^{-X}$ est strictement décroissante.
III-B-3-b-	Sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car : $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 f_{n+1}dx - \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 (f_{n+1} - f_n(x))dx$ Donc d'après la question **III-B-3-a-** et comme $0 < 1$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
III-B-4-	$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$ car $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} > 0$ et $0 < 1$ donc $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx > 0$.
III-B-5-	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, lorsque n tend vers $+\infty$, car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0.
III-B-6-a-	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - e^{-n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$
III-B-6-b-	$l = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} + u_n) = 2l$ et d'après la question **III-B-2-b-**, on a : Pour tout entier non nul n, $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$ Ainsi d'après la question **III-B-6-a-**, $2l = 0$, donc $l = 0$.

EXERCICE IV - (14 points)

Donner les réponses à cette partie d'exercice dans les cadres prévus à la page 11

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A

IV-A-1- Calculer $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^2$.

IV-A-2- Soit le point A d'affixe $z_A = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et le point B d'affixe $z_B = -z_A$.

IV-A-2-a- Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

IV-A-2-b- Placer A et B sur la figure.

IV-A-3- On désigne par C, l'image de B par la rotation de **centre** O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et par D l'image de C par la rotation de **centre** A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

IV-A-3-a- Placer les points C et D sur la figure de la question **IV-A-2-b-**.

IV-A-3-b- Calculer l'affixe z_C du point C sous forme algébrique.
On donnera le détail du calcul.

IV-A-3-c- Exprimer l'affixe z_D du point D en fonction de z_C et de z_A.

Justifier que $z_D = \sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$.

IV-A-4- Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier la réponse.

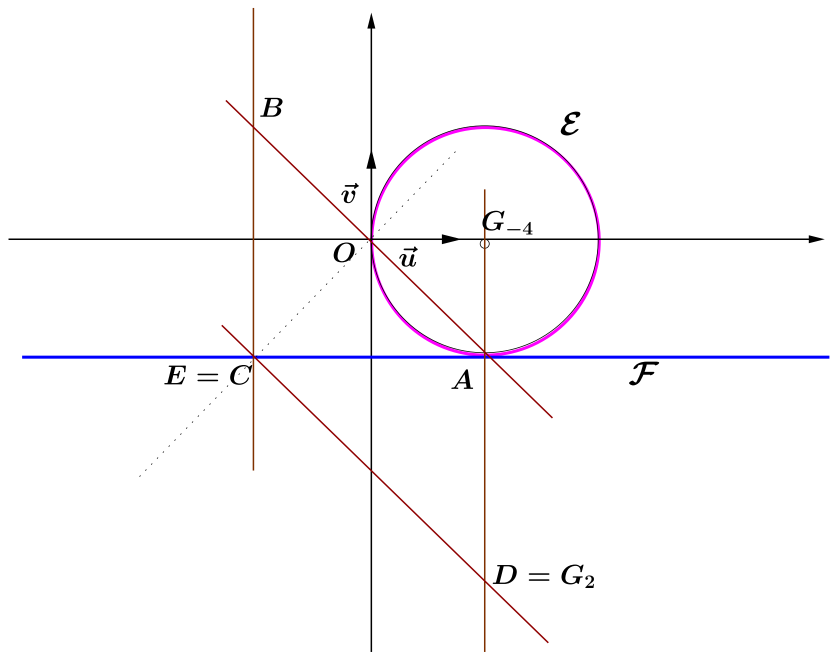
REPONSES A L'EXERCICE IV Partie A

IV-A-1- $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^2 = -4i$

IV-A-2-a- $z_A = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ donc $|z_A| = \sqrt{2+2} = 2$ et $Arg(z_A) = -\dfrac{\pi}{4}$ donc $z_A = 2e^{-\frac{i\pi}{4}}$

$z_B = -z_A = -2e^{-\frac{i\pi}{4}} = 2e^{i\pi}\, e^{-\frac{i\pi}{4}} = 2e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = 2\, e^{\frac{3\, i\, \pi}{4}}$

IV-A-2-b-



IV-A-3-a- Voir figure de **IV-A-2-b-**.

IV-A-3-b- $z_C = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

car $z_C = e^{\frac{i\pi}{2}} z_B = iz_B = -iz_A = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

IV-A-3-c- $z_D = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_C - z_A) + z_A$

$z_D = \sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$ car

$z_D = i(z_C - z_A) + z_A = i\Big(-\sqrt{2} - i\sqrt{2} - \sqrt{2} + i\sqrt{2}\Big) + \sqrt{2} - i\sqrt{2} = \sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$.

IV-A-4- Nature de $ABCD$: $ABCD$ est un parallélogramme

Justification :

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe : $z_B - z_A = -2z_A = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.

Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour affixe :

$z_C - z_D = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} - \sqrt{2} + 3i\sqrt{2} = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.

On en déduit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc que $ABCD$ est un parallélogramme

EXERCICE IV (Suite)

Donner les réponses à cette partie d'exercice dans les cadres prévus à la page 13

Partie B

Soient les points A et B d'affixes $z_A = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et $z_B = -z_A$ définis dans la **Partie A** et le point E d'affixe $z_E = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Pour tout réel m non nul, on considère le point G_m, barycentre du système $\{(A, m); (B, -2); (E, 2)\}$.

IV-B-1- Trouver une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{AG_m}$ et $\overrightarrow{BE}$.

IV-B-2- Dans cette question, on considère $m = -4$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ qui vérifient :

$$|| - 4\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{ME}|| = 4\sqrt{2}.$$

IV-B-2-a- En utilisant la question **IV-B-1-**, écrire la relation existant entre les vecteurs $\overrightarrow{AG_{-4}}$ et $\overrightarrow{BE}$. Placer G_{-4} sur la figure de la question **IV-A-2-b-**.

IV-B-2-b- Montrer que A appartient à $\mathcal{E}$.

IV-B-2-c- Quel est l'ensemble $\mathcal{E}$?

IV-B-2-d- Construire $\mathcal{E}$ sur la figure de la question **IV-A-2-b-**.

IV-B-3- Dans cette question, on considère $m = 2$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ qui vérifient :

$$(2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{ME}).\overrightarrow{DA} = -16.$$

où D est le point d'affixe $z_D = \sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$, défini à la question **IV-A-3-c-**.

IV-B-3-a- En utilisant la question **IV-B-1-**, écrire la relation existant entre les vecteurs $\overrightarrow{AG_2}$ et $\overrightarrow{BE}$. Déterminer alors G_2.

IV-B-3-b- On montre que M est un point de $\mathcal{F}$ si et seulement si on a :
$\overrightarrow{MG_2}.\overrightarrow{DA} = a$ où a un réel. Préciser le réel a.

IV-B-3-c- Montrer que A appartient à $\mathcal{F}$.

IV-B-3-d- On en déduit que M est un point de $\mathcal{F}$ si et seulement si on a :
$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DA} = b$ et $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DA} = c$,
où b et c sont deux réels. Préciser les réels b et c.
Dans ce cas, que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{DA}$?

IV-B-3-e- Quel est l'ensemble $\mathcal{F}$? Le tracer sur la figure de la question **IV-A-2-b-**.

REPONSES A L'EXERCICE IV (Suite) Partie B

IV-B-1-	Relation entre $\overrightarrow{AG_m}$ et $\overrightarrow{BE}$: $\overrightarrow{AG_m} = \dfrac{2}{m}\overrightarrow{BE}$ En effet, par définition du barycentre G_m, on a $m\overrightarrow{G_mA} - 2\overrightarrow{G_mB} + 2\overrightarrow{G_mE} = \vec{0}$ Donc $m\overrightarrow{G_mA} + 2\overrightarrow{BG_m} + 2\overrightarrow{G_mE} = \vec{0}$ On en déduit $m\overrightarrow{G_mA} + 2(\overrightarrow{BG_m} + \overrightarrow{G_mE}) = m\overrightarrow{G_mA} + 2\overrightarrow{BE} = \vec{0}$
IV-B-2-a-	Relation entre $\overrightarrow{AG_{-4}}$ et $\overrightarrow{BE}$: $\overrightarrow{AG_{-4}} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BE}$ Voir figure de **IV-A-2-b-**.
IV-B-2-b-	$A \in \mathcal{E}$ car : $\Vert -4\overrightarrow{AA} - 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE}\Vert = \Vert 2\overrightarrow{BE}\Vert = 2\vert z_E - z_B\vert$ $= 2\vert -\sqrt{2} - i\sqrt{2} + \sqrt{2} - i\sqrt{2}\vert = 2\vert -2i\sqrt{2}\vert = 4\sqrt{2}$. Donc A appartient à $\mathcal{E}$.
IV-B-2-c-	$\mathcal{E}$ est le cercle de centre G_{-4} et de rayon $\sqrt{2}$. Car $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M vérifiant $\Vert -4\overrightarrow{MG_{-4}}\Vert = 4\sqrt{2}$ soit $MG_{-4} = \sqrt{2}$.
IV-B-2-d-	Voir figure de **IV-A-2-b-**.
IV-B-3-a-	Relation entre $\overrightarrow{AG_2}$ et $\overrightarrow{BE}$: $\overrightarrow{AG_2} = \overrightarrow{BE}$ Et comme $E = C$ donc $ABED = ABCD$ est un parallélogramme, on a : $G_2 = D$
IV-B-3-b-	$a = -8$ Car $(2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{ME}).\overrightarrow{DA} = -16$ est équivalent à $2\overrightarrow{MG_2}.\overrightarrow{DA} = -16$, Ce qui est équivalent à $\overrightarrow{MG_2}.\overrightarrow{DA} = -8$.
IV-B-3-c-	$A \in \mathcal{F}$ car comme $G_2 = D$, on a : $\overrightarrow{AG_2}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA} = -DA^2 = -\vert z_D - z_A\vert^2 = -(-2\sqrt{2})^2 = -8$. donc d'après la question **IV-B-3-b-**, A appartient à $\mathcal{F}$.
IV-B-3-d-	$b = 0$ $c = 0$ D'après la question **IV-B-3-c-**, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA} = -8$, d'autre part d'après la question **IV-B-3-b-**, $M \in \mathcal{F}$ est équivalent à $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DA} = -8$. D'où $M \in \mathcal{F}$ est équivalent à $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DA} = -8 + 8 = 0$, d'où $b = 0$. Par ailleurs $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{MD}).\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DA} = 0$, D'où $c = 0$. On en déduit : Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont orthogonaux.
IV-B-3-e-	$\mathcal{F}$ est donc la droite passant par A et orthogonale à la droite (AD). C'est donc la droite (AE). Voir figure de **IV-A-2-b-**.

EXERCICE V - (8 points)

Donner les réponses à cet exercice dans les cadres prévus à la page 15

Pour déterminer l'âge de résidus organiques, on utilise la méthode basée sur la désintégration radioactive. Les êtres vivants absorbent et assimilent le carbone de l'atmosphère et on considère que leur organisme comporte une proportion constante de carbone $\mathbf{14}$. Après leur mort, la proportion de carbone $\mathbf{14}$ de leur organisme décroît lentement. Ainsi en déterminant la masse résiduelle de carbone $\mathbf{14}$ dans un échantillon d'un corps organique, on pourra évaluer approximativement l'âge de celui-ci.

On définit la fonction f qui donne la masse résiduelle $f(t)$ de carbone $\mathbf{14}$ dans un échantillon à la date t.

Si f' désigne la dérivée de la fonction f, $f'(t)$ représente la "vitesse" de désintégration du carbone $\mathbf{14}$ à la date t. Cette vitesse est proportionnelle à la masse et vérifie l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad : \quad f'(t) = -Cf(t)$$

où C est un réel strictement positif.

On note m_0, la masse initiale de carbone $\mathbf{14}$ contenue à la date $t = 0$, dans l'échantillon considéré. m_0 est un réel strictement positif.

V-1- Déterminer $f(t)$ en fonction de C et de m_0.

V-2- On observe que la masse de carbone $\mathbf{14}$ diminue de $\mathbf{1,2}$ % par siècle.
L'unité de temps est le siècle.

V-2-a- Déterminer C. On donnera le détail des calculs et la valeur exacte de C.

V-2-b- Donner une valeur approchée de C à $\mathbf{10^{-3}}$ près.

V-3- On suppose qu'un corps organique contenait une masse $m_0 = 1$ gramme de carbone $\mathbf{14}$ à la date $t = 0$.

V-3-a- Quelle masse m_{100} de carbone $\mathbf{14}$, contient-il au bout de $\mathbf{100}$ siècles ?
On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à $\mathbf{10^{-3}}$ gramme près.

V-3-b- Quelle masse m_{1000} de carbone $\mathbf{14}$, contient-il au bout de $\mathbf{1000}$ siècles ?
On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à $\mathbf{10^{-6}}$ gramme près.

V-4- On considère un corps organique contenant $\mathbf{0,1}$ gramme de carbone $\mathbf{14}$ à la date $t = t_1$.
Les géologues établissent que ce corps devait contenir $\mathbf{1}$ gramme de carbone $\mathbf{14}$ à la date $t = 0$.

V-4-a- Donner son âge t_1. On donnera le détail des calculs et la valeur exacte de t_1.

V-4-b- Donner une valeur approchée de t_1 à un siècle près.

V-5- On appelle période du carbone $\mathbf{14}$ le temps T nécessaire pour que la quantité initiale m_0 de carbone $\mathbf{14}$ soit à moitié désintégrée.

V-5-a- Déterminer la période du carbone $\mathbf{14}$. On donnera le détail du calcul et la valeur exacte de T.

V-5-b- Donner une valeur approchée de T à un an près.

REPONSES A L'EXERCICE V

V-1-	$f(t) = m_0\, e^{-Ct}$
V-2-a-	$C = -\, ln(0,988)$ Car : A la date $t = 1$ on a $f(1) = m_0\, \dfrac{100 - 1,2}{100}$ Donc $m_0\, e^{-C} = 0,988\; m_0$ D'où $C = -\, ln(0,988)$
V-2-b-	$C \simeq 0,012$
V-3-a-	$m_{100} = e^{ln(0,988)\times 100}$ $m_{100} = 0,299016.... \simeq 0,300$
V-3-b-	$m_{1000} = e^{ln(0,988)\times 1000}$ $m_{1000} = 0,000005714... \simeq 6.10^{-6}$
V-4-a-	$t_1 = \dfrac{ln(0,1)}{ln(0,988)}$ Car $f(t_1) = 0,1$ Ce qui équivaut à $m_0\, e^{ln(0,988)t_1} = e^{ln(0,988)t_1} = 0,1$ D'où $ln(0,988)t_1 = ln(0,1)$ Donc $t_1 = \dfrac{ln(0,1)}{ln(0,988)} = 190,72...$
V-4-b-	$t_1 \simeq 191$ siècles
V-5-a-	$T = \dfrac{ln(0,5)}{ln(0,988)}$ Car $f(T) = \dfrac{1}{2} f(0)$ Ce qui équivaut à $m_0\, e^{-CT} = \dfrac{1}{2}\, m_0$ Soit $e^{-CT} = 0,5$ ou $T = -\, \dfrac{ln(0,5)}{C}$ Ainsi, d'après la question **V-2-a-**, on a : $T = \dfrac{ln(0,5)}{ln(0,988)} = 57,4149...$
V-5-b-	$T \simeq 5741$ ans