Le sujet comporte 10 pages numérotées de 2 à 11

EXERCICE I - (7.5 points)

Donner les réponses à la Partie A de cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

On considère la fonction f définie sur $]\,0;\,+\infty\,[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthogonal.

Partie A

I-A-1- Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

I-A-2-a- Déterminer $f'(x)$, où f' désigne la dérivée de f.

2-b- Dresser le tableau des variations de f sur $]\,0\,;+\infty[$. Préciser $f(1)$ et $f(e)$.

2-c- En déduire que f admet un maximum M que l'on donnera.

I-A-3- Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$. On placera avec soin les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et e.

I-A-4- Donner, suivant les valeurs de x appartenant à $]\,0\,;+\infty[$, le signe de $f(x)$.

I-A-5- Soit A un réel. On veut déterminer, suivant les valeurs de A, le nombre de solutions de l'équation :

$$f(x) = A$$

Distinguer les différents cas et préciser, pour chacun d'eux, le nombre de solutions appartenant à chaque intervalle $]0\,;\,1]$, $]1\,;\,e]$ ou $]e\,;\,+\infty[$.

REPONSES A L'EXERCICE I (Partie A)

I-A-1- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

I-A-2-a- $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

I-A-2-b-

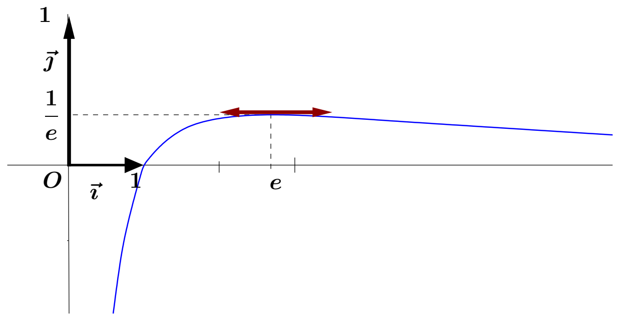
x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$f(1) = 0$

$f(e) = \dfrac{1}{e}$

I-A-2-c- $M = \dfrac{1}{e}$

I-A-3-



I-A-4-

x	0		1		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

I-A-5-

Conditions sur A	Nombre de solutions de $f(x) = A$		
Si A vérifie :	dans $]0\,;\,1]$	dans $]1\,;\,e]$	dans $]e\,;\,+\infty[$
$A < 0$	une solution	0	0
$A = 0$	une sol. : 1	0	0
$0 < A < \frac{1}{e}$	0	une solution	une solution
$A = \frac{1}{e}$	0	une sol. : e	0
$A > \frac{1}{e}$	0	0	0

EXERCICE I - (suite)

Donner les réponses à la Partie B de cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Partie B

Soit a un réel strictement positif.

On se propose dans cette partie de déterminer tous les réels x, strictement positifs, qui vérifient l'inéquation $(\mathcal{E}_a)$ suivante :

$$(\mathcal{E}_a) \;:\quad a^x \leq x^a$$

I-B-1- Justifier que l'inéquation $a^x \leq x^a$ est équivalente à l'inéquation $f(a) \leq f(x)$.

I-B-2- On suppose dans cette question que : $a = e$.

2-a- En utilisant la partie A, donner l'ensemble S_1 des solutions de l'inéquation : $(\mathcal{E}_e) \;:\quad e^x \leq x^e$.

2-b- Application : Sans les calculer, comparer e^π et π^e. Justifier la réponse.

I-B-3- On suppose dans cette question que : $0 < a \leq 1$.

Quel est le signe de $f(a)$? En utilisant la partie A, donner l'ensemble S_2 des solutions de l'inéquation $(\mathcal{E}_a)$, en fonction de a.

I-B-4- On suppose dans cette question que : $a > 1$ et $a \neq e$.

4-a- En utilisant la partie A, expliquer pourquoi l'équation $f(x) = \dfrac{\ln a}{a}$ admet deux solutions a_1 et a_2 qui vérifient : $1 < a_1 < e < a_2$.

On remarquera que l'une des solutions a_1 ou a_2 est égale à a.

4-b- Donner alors l'ensemble S_3 des solutions de l'inéquation $(\mathcal{E}_a)$, en fonction de a_1 et a_2.

I-B-5- Application : On suppose dans cette question que : $a = 2$.

5-a- Déterminer l'entier naturel n, différent de 2, tel que : $f(n) = f(2)$.

5-b- En déduire l'ensemble S_4 des solutions de l'inéquation : $(\mathcal{E}_2) \;:\quad 2^x \leq x^2$

REPONSES A L'EXERCICE I (Partie B)

I-B-1-	$a^x \leq x^a \iff e^{x \ln a} \leq e^{a \ln x}$ $\iff x \ln a \leq a \ln x$ car $\ln$ est croissante $\iff \dfrac{\ln a}{a} \leq \dfrac{\ln x}{x}$ car $a > 0$ et $x > 0$ $\iff f(a) \leq f(x)$.
I-B-2-a-	$S_1 = \{e\}$
I-B-2-b-	$e^\pi > \pi^e$ car $f(e) > f(\pi)$ (cf. **I-A-2-b-**), puisque f admet pour maximum $f(e)$, maximum obtenu uniquement en e.
I-B-3-	Le signe de $f(a)$ est négatif car $0 < a \leq 1$ (cf.**I-A-3-**). $S_2 = \left[a\,;+\infty\right[$
I-B-4-a-	$f(x) = \dfrac{\ln a}{a}$ admet deux solutions a_1 et a_2 car : Comme $a > 1$ et $a \neq e$, alors $0 < f(a) < \dfrac{1}{e}$ (cf. **I-A-3-**). D'après **I-A-5-**, l'équation $f(x) = f(a)$ admet donc deux solutions, l'une, que l'on note a_1, dans $\left]1\,;e\right[$ et l'autre, que l'on note a_2, dans $\left]e\,;+\infty\right[$. On a $f(a_1) = f(a) = f(a_2)$ et a est égale à l'une des solutions a_1 ou a_2.
I-B-4-b-	$S_3 = \left[a_1\,;a_2\right]$
I-B-5-a-	$n = 4$ car $f(4) = \dfrac{\ln 4}{4} = \dfrac{2\ \ln 2}{4} = \dfrac{\ln 2}{2} = f(2)$.
I-B-5-b-	$S_4 = \left[2\,;4\right]$

EXERCICE II - (7 points)

Donner les réponses des questions ci-dessous dans le cadre prévu à la page 7

Ariane et Benjamin échangent des balles au ping-pong.

Soient les événements suivants :

$\boldsymbol{A}$: "Ariane marque le point" et $\boldsymbol{B}$: "Benjamin marque le point".

Ariane étant légèrement plus expérimentée que Benjamin, la probabilité qu'elle marque un point est :

$$\boldsymbol{p = \mathbb{P}(A) = \frac{53}{100}}$$

Ils décident d'engager une partie selon les modalités suivantes :

- Le joueur qui "gagne un set" est le premier qui marque deux points, consécutifs ou non.

- La partie s'arrête dès qu'un des deux joueurs a remporté trois sets, consécutifs ou non. On dit alors que ce dernier a gagné la partie.

Partie A

Dans cette partie, on étudie la probabilité pour Ariane de **"gagner un set" (deux points marqués, de façon consécutive ou non)**.

II-A-1- Dans un échange de balles, quelle est la probabilité $\boldsymbol{q}$ que Benjamin marque le point ?

II-A-2- Compléter l'arbre de tous les événements élémentaires.

II-A-3- Donner la probabilité $\boldsymbol{P_1}$ qu'Ariane marque les deux premiers points.

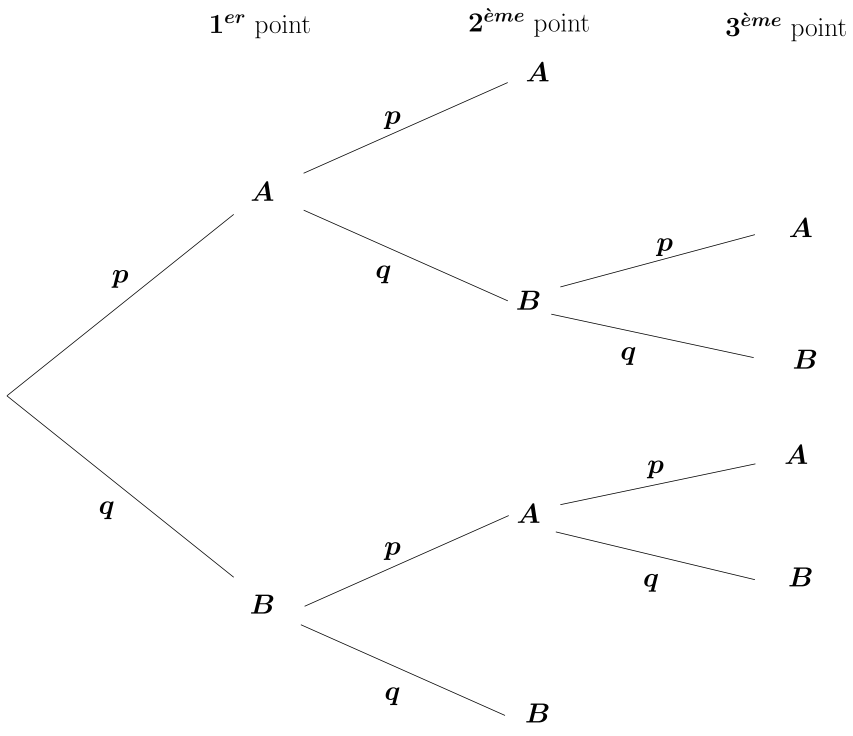
II-A-4- Donner la probabilité $\boldsymbol{P_2}$ qu'Ariane gagne le set, Benjamin ayant marqué un point.

II-A-5- Donner la probabilité $\boldsymbol{P_3}$ qu'Ariane gagne le set. On donnera la valeur exacte et une valeur approchée à $\boldsymbol{10^{-3}}$ près.

REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1- $q = \dfrac{47}{100}$

II-A-2-



II-A-3- $P_1 = p^2 = \left(\dfrac{53}{100}\right)^2 = 0,2809$

II-A-4- $P_2 = 2\,q\,p^2 = 2 \times \dfrac{47}{100} \times \left(\dfrac{53}{100}\right)^2 = 0,264046$

II-A-5- $P_3 = P_1 + P_2 = \left(\dfrac{53}{100}\right)^2 \left(1 + 2 \times \dfrac{47}{100}\right) = 0,544946$ $\qquad P_3 \simeq 0,545$

EXERCICE II - (suite)

Donner les réponses aux Parties B et C dans le cadre prévu à la page 9

Partie B

On étudie maintenant la probabilité pour Ariane de **"gagner la partie" (trois sets gagnés, consécutifs ou non)**.

Tous les sets sont joués dans des conditions identiques et indépendantes.

Pour le jeu d'un set, on note les événements :

$\boldsymbol{S}$: "Ariane gagne le set" et $\boldsymbol{E}$: "Ariane perd le set".

On suppose que, pour chaque set, les probabilités de ces événements sont :

$$\boldsymbol{P = \mathbb{P}(S) = 0,545 \quad \text{et} \quad Q = \mathbb{P}(E) = 0,455.}$$

Ariane et Benjamin engagent une partie.

II-B-1- Finir le dessin de l'arbre des événements élémentaires et le compléter.

II-B-2- Donner, en fonction de $\boldsymbol{P}$, la probabilité $\boldsymbol{T_1}$ qu'Ariane gagne les trois permiers sets.

II-B-3- Donner, en fonction de $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$, la probabilité $\boldsymbol{T_2}$ qu'Ariane gagne la partie, Benjamin ayant remporté un set.

II-B-4- Donner, en fonction de $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$, la probabilité $\boldsymbol{T_3}$ qu'Ariane gagne la partie, Benjamin ayant remporté deux sets.

II-B-5-a- Donner, en fonction de $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$, la probabilité $\boldsymbol{T}$ qu'Ariane gagne la partie.

5-b- Donner une valeur approchée à $\mathbf{10^{-3}}$ près de la probabilité $\boldsymbol{T}$.

II-B-6-a- Déterminer, en fonction de $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$, la probabilité $\boldsymbol{H}$ qu'Ariane gagne la partie, sachant que Benjamin a remporté le premier set.

6-b- Donner une valeur approchée à $\mathbf{10^{-3}}$ près de la probabilité $\boldsymbol{H}$.

Partie C

On suppose maintenant que chaque joueur gagne **10** euros pour chaque set gagné et perde **10** euros pour chaque set perdu. Ariane et Benjamin engagent une partie dans les mêmes conditions que précédemment.

On note $\boldsymbol{G_A}$ la variable aléatoire représentant le gain en euros d'Ariane à la fin de la partie et $\boldsymbol{G_B}$ la variable aléatoire représentant le gain de Benjamin. Ces gains peuvent être positifs ou négatifs.

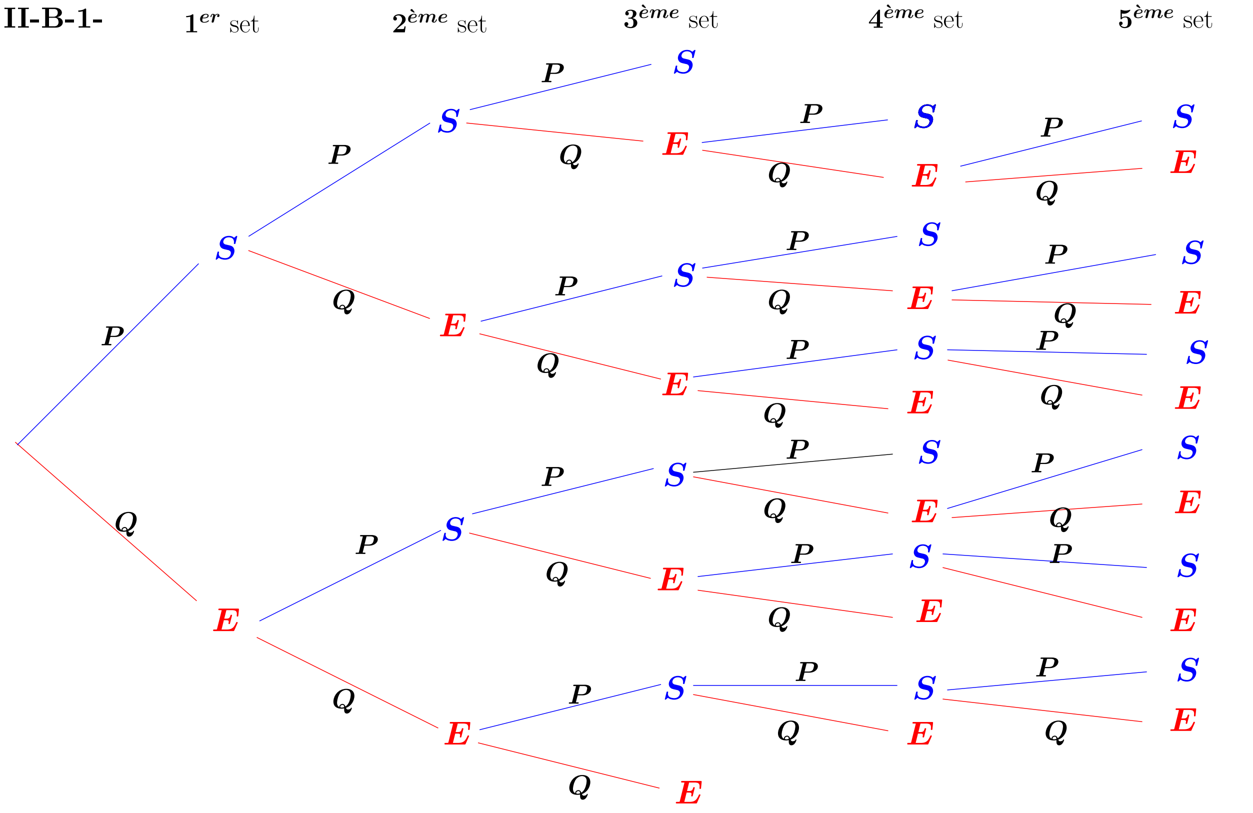
II-C-1- Donner le tableau représentant la loi de probabilité de $\boldsymbol{G_A}$. On donnera les probabilités en fonction de $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$.

II-C-2- Donner une valeur approchée à $\mathbf{10^{-2}}$ près de l'espérance de gain $\boldsymbol{E(G_A)}$ d'Ariane à l'issue de la partie.

II-C-3- Donner, en fonction de $\boldsymbol{E(G_A)}$, l'espérance de gain $\boldsymbol{E(G_B)}$ de Benjamin.

REPONSES A L'EXERCICE II (Parties B et C)

II-B-1-



II-B-2- $T_1 = P^3$

II-B-3- $T_2 = 3\,P^3\,Q$

II-B-4- $T_3 = 6\,P^3\,Q^2$

II-B-5-a- $T = P^3\left(1 + 3\,Q + 6\,Q^2\right)$

II-B-5-b- $T \simeq 0,584$

II-B-6-a- $H = P^3 + 3\,P^3\,Q$

II-B-6-b- $H \simeq 0,383$

II-C-1-

x_i	-30	-20	-10	10	20	30
$\mathbb{P}(G_A = x_i)$	Q^3	$3\,Q^3\,P$	$6\,Q^3\,P^2$	$6\,P^3\,Q^2$	$3\,P^3\,Q$	P^3

II-C-2- $\mathbb{E}(G_A) \simeq 3,70$

II-C-3- $\mathbb{E}(G_B) = -\,\mathbb{E}(G_A)$

EXERCICE III - (5.5 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 11

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan on note $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ le réel égal au produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On considère un vecteur unitaire $\vec{k}$ du plan, c'est-à-dire tel que $\|\vec{k}\|^2 = \vec{k}\,.\,\vec{k} = 1$ et la droite $\mathcal{D}$ passant par O et de vecteur directeur $\vec{k}$.

On rappelle qu'un point N du plan appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement s'il existe un réel x_N tel que : $\overrightarrow{ON} = x_N\,\vec{k}$.

Pour tout point M du plan, on note $\rho(M)$ le produit scalaire suivant :

$$\rho(M) = \overrightarrow{OM}\,.\,\vec{k}$$

Partie A

III-A-1- Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ de tous les points M du plan qui vérifient : $\rho(M) = 0$

III-A-2- Soit N un point quelconque de la droite $\mathcal{D}$ et x_N le réel tel que $\overrightarrow{ON} = x_N\,\vec{k}$.
Déterminer $\rho(N)$ en fonction de x_N.

Partie B

On considère la transformation f du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe le point $M' = f(M)$ défini par :

$$\overrightarrow{OM'} = 2\,\rho(M)\,\vec{k} - \overrightarrow{OM}$$

III-B-1- Déterminer l'image N' d'un point quelconque N de la droite $\mathcal{D}$. Justifier la réponse.

III-B-2- Soit M un point quelconque du plan, M' son image par f et I_M le milieu du segment $[MM']$.

2-a- Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OI_M}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ et montrer que I_M appartient à la droite $\mathcal{D}$.

2-b- Déterminer $\rho(M')$ en fonction de $\rho(M)$. On fera le détail du calcul.

2-c- En déduire l'image $M'' = f(M')$ de M'. On justifiera la réponse.

2-d- Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\vec{k}$.

III-B-3- En déduire quelle est la transformation f.

REPONSES A L'EXERCICE III

III-A-1-	$\mathcal{F}$ est la droite orthogonale à la droite $\mathcal{D}$ passant par O.
III-A-2-	$\rho(N) = \overrightarrow{ON}\,.\,\vec{k} = x_N\,\vec{k}\,.\,\vec{k} = x_N$ car $\vec{k}\,.\,\vec{k} = 1$.
III-B-1-	$N' = N$ car $\overrightarrow{ON'} = 2\,\rho(N)\,\vec{k} - \overrightarrow{ON} = 2\,x_N\,\vec{k} - x_N\,\vec{k} = x_N\,\vec{k} = \overrightarrow{ON}$.
III-B-2-a-	$\overrightarrow{OI_M} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}\right)$ I_M appartient à $\mathcal{D}$ car $\overrightarrow{OI_M} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM} + 2\,\rho(M)\,\vec{k} - \overrightarrow{OM}\right) = \rho(M)\,\vec{k}$ et $\rho(M) \in \mathbb{R}$.
III-B-2-b-	$\rho(M') = \overrightarrow{OM'}\,.\,\vec{k} = \left(2\,\rho(M)\,\vec{k} - \overrightarrow{OM}\right)\,.\,\vec{k}$. D'où $\rho(M') = 2\,\rho(M)\,\vec{k}\,.\,\vec{k} - \overrightarrow{OM}\,.\,\vec{k}$. Et comme $\vec{k}\,.\,\vec{k} = 1$ et $\overrightarrow{OM}\,.\,\vec{k} = \rho(M)$, Alors $\rho(M') = \rho(M)$.
III-B-2-c-	$M'' = M$ car $\overrightarrow{OM''} = 2\,\rho(M')\,\vec{k} - \overrightarrow{OM'} = 2\,\rho(M)\,\vec{k} - 2\,\rho(M)\,\vec{k} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}$.
III-B-2-d-	$\overrightarrow{MM'} \perp \vec{k}$ car $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MO} + 2\,\rho(M)\,\vec{k} - \overrightarrow{OM}$ Donc $\overrightarrow{MM'} = 2\,\rho(M)\,\vec{k} - 2\,\overrightarrow{OM}$. D'où $\overrightarrow{MM'}\,.\,\vec{k} = 2\,\rho(M)\,\vec{k}\,.\,\vec{k} - 2\,\overrightarrow{OM}\,.\,\vec{k} = 2\rho(M) - 2\rho(M) = 0$.
III-B-3-	f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

Ne rien inscrire dans ce cadre

Epreuves communes GEIPI-ENI
Mercredi 17 mai 2006

SUJET 4 MATHEMATIQUES

Groupe ENI
Ecoles Nationales d'Ingénieurs
Brest, St Etienne, Metz, Tarbes

NOM	PRENOM
DATE DE NAISSANCE	N° INSCRIPTION

Note :

Le sujet 4 comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

EXERCICE I - (3,5 points)

Donner les réponses des questions I-1- et I-2- dans le cadre prévu ci-dessous

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I-1- Montrer que g est impaire.

I-2-a- Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$g(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

I-2-b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. Justifier la réponse.

REPONSES A L'EXERCICE I

I-1-	g est impaire car pour tout réel x, on a : $g(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = -g(x)$
I-2-a-	$g(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ car $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$
I-2-b-	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ donc $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - e^{-2x}) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + e^{-2x}) = 1 \end{cases}$

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

EXERCICE I - (suite)

Donner les réponses aux questions suivantes de l'exercice dans le cadre prévu à la page 3

I-3-a- Déduire de ce qui précède que $\mathcal{C}_g$ admet une droite asymptote $\boldsymbol{\Delta_1}$, au voisinage de $+\infty$, dont on donnera une équation.

I-3-b- En utilisant la question **1-**, déduire que $\mathcal{C}_g$ admet une droite asymptote $\boldsymbol{\Delta_2}$, au voisinage de $-\infty$, dont on donnera une équation.

I-4-a- Montrer que pour tout réel x, on a :

$$g(x) < 1$$

I-4-b- Indiquer alors la position de la courbe $\mathcal{C}_g$ par rapport aux deux asymptotes $\boldsymbol{\Delta_1}$ et $\boldsymbol{\Delta_2}$.

I-5-a- Déterminer $g'(x)$, où g' désigne la dérivée de g.

I-5-b- Donner le tableau des variations de g sur $\mathbb{R}$.

I-6- Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à la courbe $\mathcal{C}_g$, au point d'abscisse **0**.

I-7- Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$, les asymptotes $\boldsymbol{\Delta_1}$ et $\boldsymbol{\Delta_2}$ et la tangente $\mathcal{T}_0$.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

REPONSES A L'EXERCICE I (suite)

I-3-a- $\Delta_1 \ : y = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$	**I-3-b-** $\Delta_2 \ : y = -1$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$

I-4-a- $g(x) < 1$ car $g(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ et pour tout réel x, on a :

$$g(x) - 1 = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} - 1 = \frac{1 - e^{-2x} - 1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = -\frac{2\,e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} < 0$$

I-4-b- $\mathcal{C}_g$ est en dessous de Δ_1 et au dessus de Δ_2.

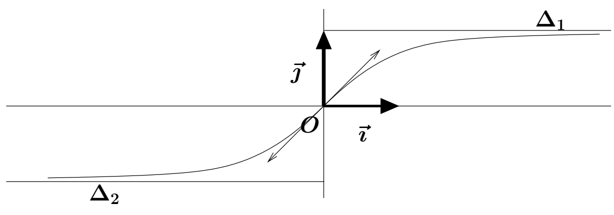
I-5-a- $$g'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

I-5-b-

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	1	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

I-6- $\mathcal{T}_0 \ : y = g'(0)(x - 0) + g(0) \iff \mathcal{T}_0 \ : y = x.$

I-7-



NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

EXERCICE II (6,5 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Soit $\mathcal{P}$ le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A

On considère la transformation T_0 qui, à tout point M du plan $\mathcal{P}$, d'affixe z, associe le point M', d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\, z + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

II-A-1- Déterminer l'affixe b de l'unique point B invariant par T_0, c'est-à-dire vérifiant : $T_0(B) = B$.

On donnera b sous forme algébrique et on justifiera soigneusement tous les calculs.

II-A-2- On suppose que M est différent de B et on pose : $Z = \dfrac{z' - b}{z - b}$.

II-A–2-a- Déterminer le réel R tel que $Z = i\, R$. Donner le détail des calculs.

II-A-2-b- Déterminer un argument $Arg\, Z$ et le module $|\, Z\,|$ de Z.

II-A-2-c- En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}\right)$ et une expression de la distance BM' en fonction de BM.

Partie B

Soit α un nombre complexe et A_α le point d'affixe α.

On considère la transformation T_α qui, à tout point M du plan, d'affixe z, associe le point M', d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha + i)\, z + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \alpha)$$

II-B-1- On suppose dans cette question que : $\alpha = \sqrt{2} - i$.

II-B-1-a- Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

II-B-1-b- En déduire que $T_{\sqrt{2}-i}$ est une transformation géométrique simple, dont on donnera le(s) élément(s) caractéristique(s).

II-B-2-a- Il existe une valeur α_1 pour laquelle la transformation T_{α_1} est une rotation de centre O. Quelle est cette valeur ?

II-B-2-b- Déterminer alors l'angle θ_1 de la rotation T_{α_1}. Justifier votre réponse.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1-	$b = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} i$ car $z' = z \iff \frac{\sqrt{2}}{2} i z + \frac{\sqrt{2}}{2} = z$ $\iff z(2 - \sqrt{2} i) = \sqrt{2}$ $\iff z = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2} i} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2} i)}{4+2} = \frac{\sqrt{2} + i}{3}$
II-A-2-a-	$R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ car comme b vérifie $b' = b$, alors $b = \frac{\sqrt{2}}{2} i b + \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où : $Z = \frac{z' - b}{z - b} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} i z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} i b + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{z - b} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} i (z - b)}{z - b} = \frac{\sqrt{2}}{2} i$
II-A-2-b-	$Arg\, Z = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ $\qquad \lvert Z \rvert = \frac{\sqrt{2}}{2}$
II-A-2-c-	$\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}\right) = Arg\, Z = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ $\qquad BM' = \frac{\sqrt{2}}{2} BM$ car $\lvert Z \rvert = \frac{BM'}{BM}$
II-B-1-a-	Affixe de $\overrightarrow{MM'}$: $z' - z = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} z + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{2} + i) - z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \sqrt{2} + i\right)$
II-B-1-b-	$T_{\sqrt{2} - i}$ est la translation de vecteur, le vecteur d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \sqrt{2} + i\right)$, car pour tout point M du plan, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est constant, puisque d'affixe constante.
II-B-2-a-	$\alpha_1 = 1$
II-B-2-b-	$\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ car $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = e^{i\frac{\pi}{4}} z$