Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9

Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthomormé, direct.
Soient A le point d'affixe $z_A = 1 + 3i$ et B le point d'affixe $z_B = 2$.

I-1- Dessiner le triangle OAB.

I-2- Expliquer pourquoi le triangle OAB est isocèle en A.

I-3- On considère le point C, symétrique du point O par rapport au point A et le point D, symétrique du point B par rapport au point O.

Placer les points C et D sur la figure de **I-1-**.

Déterminer les affixes z_C et z_D des points C et D.

I-4- On considère le point E, image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{3}$.

Placer le point E sur la figure de **I-1-**.

Déterminer l'affixe z_E du point E.

I-5- On désigne par F le barycentre des points pondérés $(A\,;\,2)$, $(B\,;\,-3)$ et $(D\,;\,2)$.

Déterminer l'affixe z_F du point F.

Placer le point F sur la figure de **I-1-**.

I-6- Justifier que les points B, E et F sont alignés.

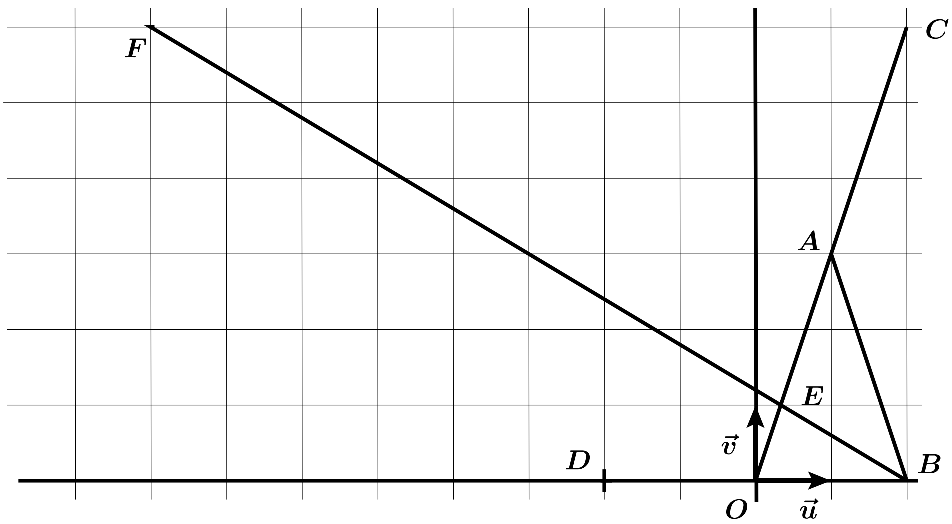
I-7- On note Z le complexe défini par : $Z = \dfrac{z_F - z_C}{z_B - z_C}$

7-a- Déterminer le réel a tel que $Z = a\,i$. On détaillera les calculs.

7-b- Déterminer le module $|Z|$ et un argument $arg(Z)$ de Z.

7-c- En déduire la nature du triangle CBF. On justifiera la réponse.

REPONSES A L'EXERCICE I

I-1-	
I-2-	$\boldsymbol{OAB}$ est isocèle en $\boldsymbol{A}$ car $\boldsymbol{0A = AB}$. En effet : $\boldsymbol{OA = \lvert z_A \rvert = \lvert 1+3i \rvert = \sqrt{10}}$ et $\boldsymbol{AB = \lvert z_B - z_A \rvert = \lvert 1-3i \rvert = \sqrt{10}}$
I-3-	$\boldsymbol{z_C = 2 + 6\,i}$ $\boldsymbol{z_D = -\,2}$
I-4-	$\boldsymbol{z_E = \dfrac{1}{3} + i}$
I-5-	$\boldsymbol{z_F = -\,8 + 6\,i}$
I-6-	$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ alignés car $\boldsymbol{\overrightarrow{BE}}$ a pour affixe $\boldsymbol{z_E - z_B = \dfrac{1}{3} + i - 2 = -\dfrac{5}{3} + i}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{BF}}$ a pour affixe $\boldsymbol{z_F - z_B = -\,8 + 6\,i - 2 = -\,10 + 6\,i}$ donc $\boldsymbol{\overrightarrow{BF} = 6\,\overrightarrow{BE}}$.
I-7-a-	$\boldsymbol{a = -\dfrac{5}{3}}$ car $\boldsymbol{Z = \dfrac{-8+6i-2-6i}{2-2-6i} = \dfrac{10}{6i} = -\dfrac{5}{3}\,i}$
I-7-b-	$\boldsymbol{\lvert Z \rvert = \dfrac{5}{3}}$ $\boldsymbol{Arg(Z) = -\dfrac{\pi}{2}}$
I-7-c-	Le triangle $\boldsymbol{CBF}$ est rectangle en $\boldsymbol{C}$ car $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{CB}\,,\,\overrightarrow{CF}\right) = Arg(Z) = -\dfrac{\pi}{2}}$

EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de $]1\,;\,+\infty[$, par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentant f dans un repère $(O;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ orthonormé (1 cm d'unité).

II-1-a- Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

1-b- En déduire que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes Δ_1 et Δ_2 dont on donnera les équations.

II-2-a- Soit g la fonction définie, pour tout réel x de $]1\,;\,+\infty[$, par : $g(x) = \sqrt{x^2-1}$

Justifier que sa dérivée g' vérifie, pour tout réel x de $]1\,;\,+\infty[$: $g'(x) = f(x)$

2-b- f' désigne la dérivée de f. Justifier que, pour tout réel x de $]1\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

2-c- Dresser le tableau des variations de f.

2-d- Compléter le tableau suivant, en donnant des valeurs approchées à $0,01$ près des images $f(x)$.

x	$1,1$	$1,25$	$1,5$	$1,75$	2	4
$f(x)$						

2-e- Tracer la courbe $\mathcal{C}$, Δ_1 et Δ_2 dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ donné.

II-3- Soient deux réels a et b tels que $1 < a < b$.

On définit l'intégrale : $J(a,b) = \displaystyle\int_a^b (f(x) - 1)dx.$

3-a- En utilisant la question **II-2-a-**, justifier que l'on a :

$$J(a,b) = \sqrt{b^2-1} - \sqrt{a^2-1} - b + a$$

3-b- Déterminer, en fonction de b, la limite : $I(b) = \lim\limits_{a\to 1^+} J(a,b)$

II-4-a- On admet que, pour tout réel $b > 1$, on a : $\sqrt{b^2-1} - b = \dfrac{-1}{\sqrt{b^2-1}+b}$

Déterminer la limite $K = \lim\limits_{b\to +\infty} I(b)$.

4-b- Donner une interprétation géométrique de ce que représente K.

REPONSES A L'EXERCICE II

II-1-a-

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

II-1-b-

$$\Delta_1 : x = 1 \qquad \Delta_2 : y = 1$$

II-2-a-

$g'(x) = f(x)$ car $g(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 - 1$

alors $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = f(x)$

II-2-b-

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$ car $f(x) = \dfrac{x}{g(x)}$ donc :

$$f'(x) = \frac{1 \times g(x) - x \times g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{\sqrt{x^2-1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} = \frac{\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

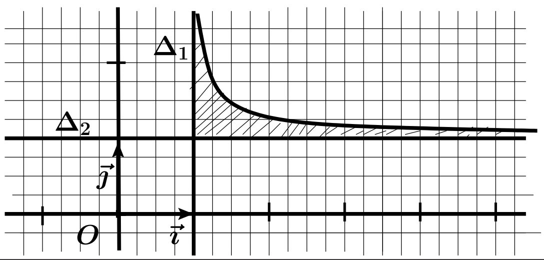
II-2-c-

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$ 1

II-2-d-

x	$1,1$	$1,25$	$1,5$	$1,75$	2	4
$f(x)$	$2,40$	$1,67$	$1,34$	$1,22$	$1,15$	$1,03$

II-2-e-



II-3-a-

$$J(a,b) = \int_a^b (f(x)-1)\,dx = \Big[g(x) - x\Big]_a^b = \Big[\sqrt{x^2-1} - x\Big]_a^b$$
$$= \sqrt{b^2-1} - b - \sqrt{a^2-1} + a$$

II-3-b-

$I(b) = \sqrt{b^2-1} - b + 1$ d'où $I(b) = \dfrac{-1}{\sqrt{b^2-1}+b} + 1$ (admis)

II-4-a-

Comme $\displaystyle\lim_{b \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{b^2-1}+b} = 0$ (*cf.* **II-3-b-**), $K = 1$

II-4-b-

K représente l'aire de la surface délimitée par les asymptotes et la courbe $\mathcal{C}$ (partie hachurée sur la figure).

EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

Un certain concours d'entrée dans une école d'ingénieurs consiste en plusieurs épreuves :

- Après examen de leur dossier scolaire, $\mathbf{15\%}$ des candidats (les meilleurs) sont admis directement sans passer d'autres épreuves.

- Les autres candidats, non admis sur dossier, passent une épreuve écrite. On estime que $\mathbf{60\%}$ des candidats réussissent cette épreuve écrite et les autres sont recalés.

- Les candidats ayant réussi l'épreuve écrite sont alors convoqués pour passer une épreuve orale. Les candidats réussissant l'épreuve orale sont alors admis. On estime que les candidats ont une chance sur trois de réussir l'épreuve orale.

On considère les évènements suivants :

- $\boldsymbol{D}$: "Le candidat est admis sur dossier"
- $\boldsymbol{E}$: "Le candidat passe et réussit l'épreuve écrite"
- $\boldsymbol{O}$: "Le candidat passe et réussit l'épreuve orale"
- $\boldsymbol{A}$: "Le candidat est admis"

On note $\overline{\boldsymbol{E}}$ l'événement contraire de $\boldsymbol{E}$.
On note $\mathbb{P}(\boldsymbol{D})$ la probabilité de l'événement $\boldsymbol{D}$ et $\mathbb{P}_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{O})$ la probabilité de l'événement $\boldsymbol{O}$ **sachant** que l'événement $\boldsymbol{E}$ est réalisé.

III-1- Compléter le schéma donné.

III-2-a- Compléter à l'aide des hypothèses : $\mathbb{P}(\boldsymbol{D}) =$ $\mathbb{P}_{\overline{\boldsymbol{D}}}(\boldsymbol{E}) =$ $\mathbb{P}_{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{O}) =$

2-b- Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(\boldsymbol{E})$ qu'un candidat passe et réussisse l'épreuve écrite et la probabilité $\mathbb{P}(\boldsymbol{O})$ qu'un candidat passe et réussisse l'épreuve orale.

2-c- On note $\boldsymbol{p}$ la probabilité $\mathbb{P}(\boldsymbol{A})$ qu'un candidat soit admis dans cette école d'ingénieurs. Justifier que $\boldsymbol{p}$ vaut $\mathbf{0,32}$.

III-3- Cinq amis décident de passer ce concours (les résultats obtenus par chaque candidat sont **indépendants** les uns des autres).

3-a- Exprimer, en fonction de $\boldsymbol{p}$, la probabilité $\boldsymbol{P_1}$ que les cinq soient admis.
Puis donner une valeur approchée de $\boldsymbol{P_1}$ à $\mathbf{10^{-4}}$ près.

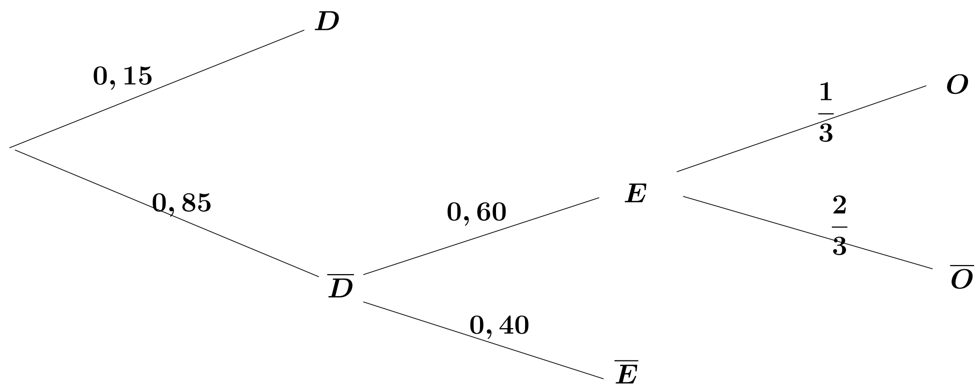
3-b- Exprimer, en fonction de $\boldsymbol{p}$, la probabilité $\boldsymbol{P_2}$ qu'au moins un des cinq soit recalé.
Puis donner une valeur approchée de $\boldsymbol{P_2}$ à $\mathbf{10^{-4}}$ près.

3-c- Exprimer, en fonction de $\boldsymbol{p}$, la probabilité $\boldsymbol{P_3}$ qu'au moins un des cinq soit admis.
Puis donner une valeur approchée de $\boldsymbol{P_3}$ à $\mathbf{10^{-4}}$ près.

3-d- Exprimer, en fonction de $\boldsymbol{p}$, la probabilité $\boldsymbol{P_4}$ que trois exactement soient admis.
Puis donner une valeur approchée de $\boldsymbol{P_4}$ à $\mathbf{10^{-4}}$ près.

III-4- Par hasard, je rencontre un candidat qui me dit avoir été admis dans cette école d'ingénieurs. Quelle est la probabilité $\mathbb{P}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{D})$ qu'il ait été admis sur dossier ?

REPONSES A L'EXERCICE III

III-1-	
III-2-a-	$\mathbb{P}(D) = 0,15$ $\quad$ $\mathbb{P}_{\overline{D}}(E) = 0,60$ $\quad$ $\mathbb{P}_E(O) = \dfrac{1}{3}$
III-2-b-	$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\overline{D}) \times \mathbb{P}_{\overline{D}}(E) = 0,85 \times 0,60 = 0,51$ $\mathbb{P}(O) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(O) = \dfrac{1}{3} \times 0,51 = 0,17$
III-2-c-	$p = 0,32$ car $A = D \cup O$ et $D \cap O$ est vide, alors : $p = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(D \cup O) = \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(O) = 0,15 + 0,17 = 0,32$
III-3-a-	$P_1 = p^5$ $\quad$ $P_1 \approx 0,0034$
III-3-b-	$P_2 = 1 - p^5$ $\quad$ $P_2 \approx 0,9966$
III-3-c-	$P_3 = 1 - (1-p)^5$ $\quad$ $P_3 \approx 0,8546$
III-3-d-	$P_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} p^3 (1-p)^2 = 10\, p^3 (1-p)^2$ $\quad$ $P_4 \approx 0,1515$
III-4-	$\mathbb{P}_A(D) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{0,15}{0,32} = \dfrac{15}{32} \approx 0,4688$

EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, par :

$$u_n = e^{-n}$$

IV-1-a- Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

1-b- Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a : $0 < u_n \leq 1$

IV-2- Etudier le signe de la fonction h définie, pour tout réel t de $]\,0\,;\,+\infty[$, par :

$$h(t) = 1 - \ln(t)$$

IV-3- Soit la fonction g définie, pour tout réel t de $]\,0\,;\,+\infty[$, par :

$$g(t) = t\,(2 - \ln(t))$$

3-a- Déterminer $g'(t)$ où g' est la dérivée de g. On détaillera le calcul.

3-b- En déduire la primitive H de la fonction h qui s'annule en e^2. On justifiera la réponse.

IV-4- On considère maintenant la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, par :

$$v_n = \int_{e^{-(n+1)}}^{e^{-n}} (1 - \ln(t))\, dt$$

4-a- Justifier que, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a : $v_n \geq 0$

4-b- A l'aide de la question **IV-3-b-**, calculer v_n en fonction de n. On détaillera le calcul.

4-c- Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

IV-5- Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

5-a- Exprimer S_n en fonction de n.

5-b- Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-1-a- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car pour tout entier n, on a : $\quad -(n+1) \leq -n$

et la fonction exponentielle étant croissante, $e^{-(n+1)} \leq e^{-n}$ donc $u_{n+1} \leq u_n$

IV-1-b- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 < u_n \leq 1 \quad$ car

$u_n = e^{-n} > 0$ car une exponentielle est toujours strictement positive.

Comme $-n \leq 0$ et exp est croissante, on a : $e^{-n} \leq e^0$ donc $u_n = e^{-n} \leq 1$

IV-2-

t	0		e		$+\infty$
Signe de $h(t)$	||	$+$	0	$-$	

IV-3-a- $g'(t) = (2 - \ln t) + t\left(-\dfrac{1}{t}\right) = 2 - \ln t - 1 = 1 - \ln t = h(t)$

IV-3-b- D'après **IV-3-a-**, pour tout $t > 0$, $\quad g'(t) = h(t)$

Par ailleurs, $\quad g\left(e^2\right) = e^2\left(2 - \ln(e^2)\right) = e^2\,(2-2) = 0$

donc $\quad H(t) = g(t) = t\,(2 - \ln t)$

IV-4-a- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n \geq 0 \quad$ car $\quad v_n$ s'écrit : $\quad v_n = \displaystyle\int_{u_{n+1}}^{u_n} h(t)\,dt$

et, d'après **IV-1-a-**, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc $\quad u_{n+1} \leq u_n$

d'après **IV-1-b-**, pour tout entier n, $\quad$ on a : $\quad 0 < u_n \leq 1 < e$

et d'après **IV-2-**, $h(t)$ est positif pour tout $t \in]0\,;\,e]$

donc v_n est l'intégrale d'une fonction positive entre deux bornes rangées dans l'ordre croissant, v_n est donc positive.

IV-4-b- $v_n = \displaystyle\int_{e^{-(n+1)}}^{e^{-n}} (1 - \ln(t))\,dt = \Big[H(t)\Big]_{e^{-(n+1)}}^{e^{-n}} = \Big[t\,(2 - \ln t)\Big]_{e^{-(n+1)}}^{e^{-n}}$

$v_n = e^{-n}(2+n) - e^{-(n+1)}(2+n+1) = (2+n)e^{-n} - (3+n)e^{-(n+1)}$

IV-4-c- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

IV-5-a- $S_n = \Big[t(2 - \ln t)\Big]_{e^{-(n+1)}}^{e^0} = \Big[t\,(2 - \ln t)\Big]_{e^{-(n+1)}}^{1} = 2 - e^{-(n+1)}\,(3+n)$

IV-5-b- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$