EXERCICE I - (16 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu ci-dessous

Dans cet exercice, on note $a = \ln(1,05)$.

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $\quad f(x) = 16\,e^{a\,x} - x - 16$.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthogonal où l'unité sur l'axe (Ox) est 1 cm et l'unité sur l'axe (Oy) est 2 cm.

Partie A

I-A-1- Calculer $f'(x)$ en fonction de a.

I-A-2-a- Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ et donner sa solution x_0, en fonction de a.

I-A-2-b- Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près .

I-A-2-c- Donner une valeur approchée de $f(x_0)$ à 10^{-1} près.

I-A-3- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Justifier votre réponse.

I-A-4- Déterminer, en fonction de a, une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

I-A-5- Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

REPONSES A L'EXERCICE I

I-A-1- $f'(x) = 16\,a\,e^{ax} - 1$

I-A-2-a- Résolution de $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 16\,a\,e^{ax} - 1 = 0 \iff e^{ax} = \frac{1}{16a} \iff ax = -\,ln(16a) \iff x = -\,\frac{ln(16a)}{a}$$

$$x_0 = -\,\frac{ln(16a)}{a}$$

I-A-2-b- $x_0 \simeq 5,1$

I-A-2-c- $f(x_0) \simeq -0,6$

I-A-3- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car on a : $f(x) = e^{ax}\left(16 - \dfrac{x}{e^{ax}}\right) - 16$

Comme $1,05 > 1$, $a = ln(1,05) > 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{ax} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{ax}} = 0$.

I-A-4- T_0 a pour équation : $y = (16\,a - 1)\,x$

I-A-5-

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$	$16a - 1$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

EXERCICE I - (suite)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

Partie A (suite)

I-A-6-a- Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution strictement positive que l'on notera α.

I-A-6-b- Montrer qu'on a l'encadrement : $9 < \alpha < 10$.

I-A-7- Préciser alors le signe de $f(x)$ en fonction de x.

I-A-8- Tracer la courbe $\mathcal{C}$, la tangente T_0 et la tangente au point d'abscisse x_0.

Partie B

Une personne a loué un studio à partir du 1^{er} janvier 2000.

Elle avait le choix entre deux contrats :

- Dans les deux cas, le loyer initial valait 2400 euros pour l'année 2000.

- Avec le contrat n°1, le locataire acceptait que, chaque année, le loyer annuel augmente de 150 euros par rapport au loyer de l'année précédente.

- Avec le contrat n°2, le locataire acceptait que, chaque année, le loyer annuel augmente de 5% par rapport au loyer de l'année précédente.

I-B-1- On note u_n le loyer payé en euros pour l'année $2000+n$, lorsque le contrat n°1 a été choisi.

I-B-1-a- Déterminer u_0, u_1 et u_2.

I-B-1-b- Déterminer u_n en fonction de n.

I-B-2- On note v_n le loyé payé en euros pour l'année $2000+n$, lorsque le contrat n°2 a été choisi.

I-B-2-a- Déterminer v_0, v_1 et v_2.

I-B-2-b- Déterminer v_n en fonction de n.

I-B-3-a- Justifier que, pour tout entier n, on a : $v_n - u_n = M \times f(n)$ où M est un entier que l'on précisera.

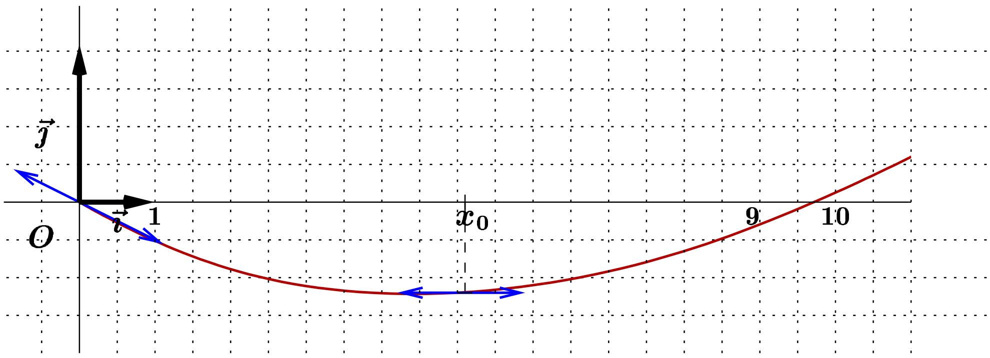
I-B-3-b- Indiquer, suivant les valeurs de n, lequel des deux loyers u_n ou v_n est le moins élevé.

I-B-4- Calculer, en fonction de n, la somme $U_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$ des loyers payés pour les années de 2000 à $2000+n$, lorsque le contrat n°1 a été choisi.

I-B-5- Calculer, en fonction de n, la somme $V_n = \sum_{p=0}^{n} v_p$ des loyers payés pour les années de 2000 à $2000+n$, lorsque le contrat n°2 a été choisi.

I-B-6- La personne a choisi le contrat n°1 au 1^{er} janvier 2000 pour une durée de 13 ans (pour les années de 2000 à 2012). A-t-elle fait le bon choix ? Justifier votre réponse.

REPONSES A L'EXERCICE I (suite)

I-A-6-a-	$f(x) = 0$ admet une solution $\alpha > 0$ car : f est continue et strictement croissante sur $[x_0; +\infty[$. Comme $f(x_0) \simeq -0,6 < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $0 \in]f(x_0); +\infty[$ donc il existe un unique réel $\alpha \in]x_0; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires) et on a $\alpha > x_0 > 0$.
I-A-6-b-	$9 < \alpha < 10$ car $f(9) = -0,178... < 0$ et $f(10) = 0,06... > 0$ et $f(\alpha) = 0$. Par ailleurs, f est croissante sur $[9; 10]$, donc, comme $f(9) < f(\alpha) < f(10)$ alors $9 < \alpha < 10$.
I-A-7-	<table><tr><td>x</td><td>0 α $+\infty$</td></tr><tr><td>signe de $f(x)$</td><td>0 $-$ 0 $+$</td></tr></table>
I-A-8-	
I-B-1-a-	$u_0 = 2400$ $u_1 = 2550$ $u_2 = 2700$
I-B-1-b-	$u_n = 2400 + 150\,n$
I-B-2-a-	$v_0 = 2400$ $v_1 = 2520$ $v_2 = 2646$
I-B-2-b-	$v_n = 2400 \times 1,05^n$
I-B-3-a-	$v_n - u_n = 2400 \times 1,05^n - 2400 - 150\,n = 2400 \times e^{n\,ln(1,05)} - 2400 - 150\,n$ $= 150\,(16\,e^{a\,n} - 16 - n) = 150\,f(n)$ $M = 150$
I-B-3-b-	Si $n \leq 9$ alors le loyer le moins élevé est v_n. Si $n \geq 10$ alors le loyer le moins élevé est u_n.
I-B-4-	$U_n = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p = \dfrac{2400 + 2400 + 150\,n}{2} \times (n+1) = 75\,n^2 + 2475\,n + 2400$
I-B-5-	$V_n = \sum\limits_{p=0}^{n} v_p = 2400 \times \dfrac{1 - 1,05^{n+1}}{1 - 1,05} = 48000\,(1,05^{n+1} - 1)$
I-B-6-	A-t-elle fait le bon choix ? $U_{12} = 42900$ et $V_{12} = 42511,15...$ ainsi $U_{12} > V_{12}$ donc elle n'a pas fait le bon choix.

EXERCICE II - (6 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Soit ABC un triangle et soient les points A', B' et C' définis de la façon suivante :

A' est le symétrique de B par rapport à C,

B' est le symétrique de C par rapport à A,

C' est le symétrique de A par rapport à B.

Partie A

On donne le triangle ABC.

II-A-1- Construire les points A', B' et C' sur la figure donnée.

II-A-2- Déterminer deux réels b et c tels que A' soit le barycentre du système $\{(B,b)\ ;\ (C,c)\}$.

II-A-3- De même B' est le barycentre d'un système de deux points affectés de coefficients. Lequel ? Même question pour le point C'.

Partie B

Dans cette partie, on connaît le triangle $A'B'C'$.

On se demande comment retrouver le triangle ABC à partir du triangle $A'B'C'$.

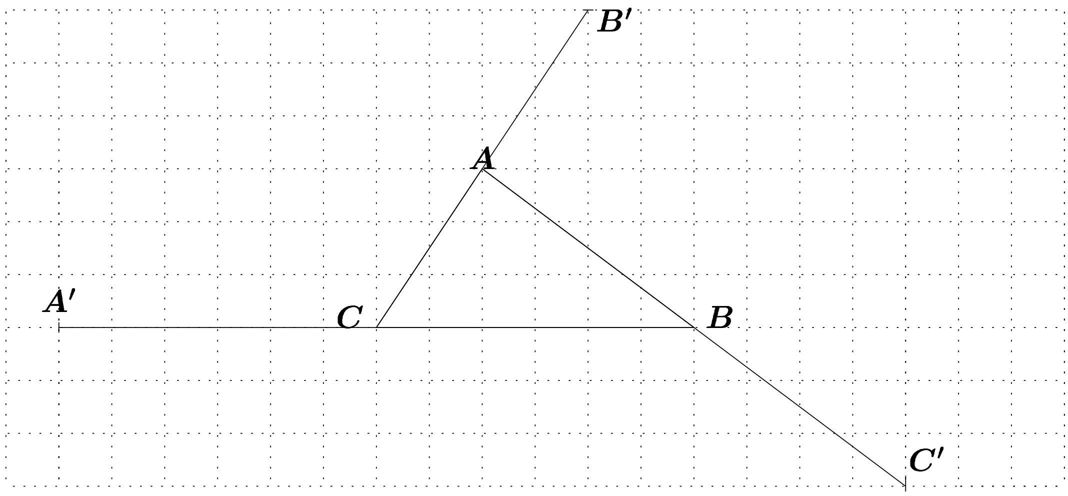
II- B-1- Justifier que le vecteur $2\,\overrightarrow{AA'} + 4\,\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$ est nul.

II- B-2- Déterminer les réels a', b' et c' tels que A soit le barycentre des points A', B' et C' affectés des coefficients a', b' et c'.

II- B-3- Construire A sur la figure donnée, en faisant les traits de construction en couleur.
En utilisant une autre couleur, construire ensuite les points B et C et tracer le triangle ABC.

REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1-



II-A-2- $b = 1$ $c = -2$

II-A-3-

B' est barycentre de $\{(C, 1)\ ;\ (A, -2)\}$

C' est barycentre de $\{(A, 1)\ ;\ (B, -2)\}$

II-B-1-

$2\,\overrightarrow{AA'} + 4\,\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{O}$ car :

Comme $\overrightarrow{AC'} = 2\,\overrightarrow{AB}$ car B est le milieu de $[AC']$,

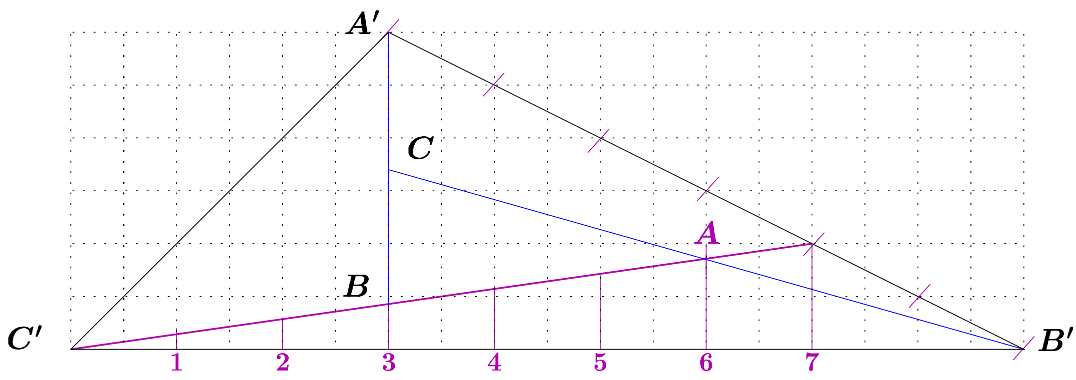
$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{CA}$ car A est le milieu de $[CB']$,

et $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{BC}$ car C est le milieu de $[A'B]$, alors :

$$\begin{aligned} 2\,\overrightarrow{AA'} + 4\,\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} &= 2(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'}) + 4\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} \\ &= 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

II-B-2- $a' = 2$ $b' = 4$ $c' = 1$

II-B-3-



EXERCICE III - (11 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

Si E et F désignent deux événements quelconques, on note :
$\mathbb{P}(E)$, la probabilité de l'événement E,
$\mathbb{P}_F(E)$, la probabilité conditionnelle de E sachant que l'événement F est réalisé.

Partie A

Un forain propose le jeu suivant :

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, indiscernables au toucher.
Le joueur tire au hasard une boule de l'urne.

Si elle noire, il la remet dans l'urne et le forain ajoute une boule noire identique.
Le joueur recommence de la même façon jusqu'à ce qu'il tire la boule blanche.
Lorsqu'il obtient la boule blanche, le jeu s'arrête et le joueur gagne un lot.
Pour tout entier n non nul, on note les événements suivants :

B_n : "Le joueur a tiré la boule blanche au $n^{ième}$ tirage",

N_n : "Le joueur a tiré une boule noire au $n^{ième}$ tirage".

III-A-1- Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(B_1)$ et $\mathbb{P}(N_1)$.

III-A-2- Sachant qu'au premier tirage le joueur a tiré une boule noire, déterminer les probabilités : $\mathbb{P}_{N_1}(B_2)$ et $\mathbb{P}_{N_1}(N_2)$.

III-A-3- Déterminer les probabilités : $\mathbb{P}(N_1 \cap B_2)$ et $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2)$.

III-A-4- Sachant que le joueur a tiré une boule noire aux premier et deuxième tirages, déterminer les probabilités : $\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(B_3)$ et $\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(N_3)$.

III-A-5-a- Déterminer la probabilité P que le joueur gagne un lot au troisième tirage.

III-A-5-b- Déterminer la probabilité Q que le joueur tire trois fois de suite une boule noire.

III-A-6- Soit n un entier non nul. Sachant que le joueur a tiré n boules noires, déterminer les probabilités : $\mathbb{P}_{N_1 \cap \dots \cap N_n}(B_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{N_1 \cap \dots \cap N_n}(N_{n+1})$.

Partie B

Le forain propose ce même jeu au prix de **15** euros la partie - une partie donnant droit à **trois tirages au maximum** - et il offre alors au joueur :
10 euros s'il tire la boule blanche au premier tirage,
20 euros s'il l'obtient au deuxième tirage,
40 euros s'il l'obtient au troisième tirage.
Soit G la variable aléatoire représentant la somme remise au joueur à la fin de la partie.

III-B-1- Quelle est la probabilité que cette somme G soit nulle ?

III-B-2- Donner le tableau de la loi de G.

III-B-3- Déterminer l'espérance de gain $\mathbb{E}(G)$ du joueur.

III-B-4- Quelle devrait être le prix p de la partie pour qu'en moyenne le joueur ne perde pas d'argent à ce jeu ?

Le propriétaire du jeu désire attirer davantage de clients : le prix de la partie reste **15** euros mais le gain sera supérieur : a euros si le joueur obtient la boule blanche au premier tirage,
$2\,a$ euros s'il l'obtient au deuxième tirage,
$4\,a$ euros s'il l'obtient au troisième tirage.
On note G_a la variable aléatoire représentant la somme alors remise au joueur à la fin de la partie.

III-B-5-a- Calculer l'espérance de gain $\mathbb{E}(G_a)$ du joueur.

III-B-5-b- Quel doit être le montant maximum a_{max} de a pour que le propriétaire ne perde pas d'argent en moyenne ?

REPONSES A L'EXERCICE III

III-A-1-	$\mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}$	$\mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{2}$
III-A-2-	$\mathbb{P}_{N_1}(B_2) = \frac{1}{3}$	$\mathbb{P}_{N_1}(N_2) = \frac{2}{3}$
III-A-3-	$\mathbb{P}(N_1 \cap B_2) = \frac{1}{6}$	$\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{3}$
III-A-4-	$\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(B_3) = \frac{1}{4}$	$\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{3}{4}$
III-A-5-a-	$P = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = \mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(B_3) \times \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{12}$	
III-A-5-b-	$Q = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(N_3) \times \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{4}$	
III-A-6-	$\mathbb{P}_{N_1 \cap \cdots \cap N_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{n+2}$ $\mathbb{P}_{N_1 \cap \cdots \cap N_n}(N_{n+1}) = \frac{n+1}{n+2}$	
III-B-1-	$\mathbb{P}(G = 0) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{1}{4}$	
III-B-2-	(see table below)	
III-B-3-	$\mathbb{E}(G) = \frac{35}{3}$	
III-B-4-	$p \leq \frac{35}{3}$ soit $p \leq 11,66...$ (euros)	
III-B-5-a-	$\mathbb{E}(G_a) = \frac{7}{6}a$	
III-B-5-b-	$a_{max} = \frac{90}{7} \simeq 12,85$ (euros)	

III-B-2- :

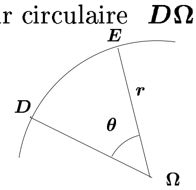
x_i	0	10	20	40
$\mathbb{P}(G = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

EXERCICE IV - (15 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Premier rappel : On considère un disque de centre Ω et de rayon r.

L'aire du secteur circulaire $\overset{\frown}{D\Omega E}$ tel que l'angle $\widehat{D\Omega E}$ mesure θ radians est égale à :



$$\textit{Aire du secteur circulaire } \overset{\frown}{D\Omega E} = \frac{\theta}{2} \times r^2.$$

Deuxième rappel : Pour tous les réels a et b, on a :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Partie A

Soit α un réel.

IV-A-1- Exprimer $\cos(2\alpha)$ et $\sin(2\alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$ et de $\sin\alpha$.

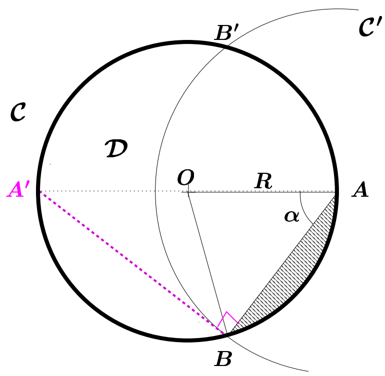
IV-A-2- Justifier que : $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$.

Partie B

On considère un disque $\mathcal{D}$ de centre O et de rayon R délimité par le cercle $\mathcal{C}$. Soit A un point du cercle $\mathcal{C}$.

Le but de l'exercice est de tracer un cercle $\mathcal{C}'$ de centre A qui partage le disque $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire.

On désigne par B et B' les points d'intersection des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et on désigne par α la mesure en radian, comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, de l'angle $\widehat{OAB}$.



IV-B-1- Montrer que le rayon AB du cercle $\mathcal{C}'$ vérifie : $AB = 2R\cos\alpha$.

IV-B-2-a- Déterminer une mesure en radian de l'angle $\widehat{AOB}$, en fonction de α.

IV-B-2-b- En déduire l'aire, en unités d'aires, du secteur circulaire $\overset{\frown}{AOB}$ du disque $\mathcal{D}$, en fonction de α et de R.

IV-B-3-a- Calculer l'aire, en unités d'aires, du triangle OAB, en fonction de α et de R.

IV-B-3-b- Déterminer l'aire, en unités d'aires, de la partie grisée de la figure ci-dessus, en fonction de α et de R.

IV-B-4- On désigne par $\mathcal{D}'$ le disque de centre A et de rayon AB, délimité par le cercle $\mathcal{C}'$.

Calculer, en fonction de α et de R, l'aire du secteur ciculaire $\overset{\frown}{BAB'}$ du disque $\mathcal{D}'$.

IV-B-5- En déduire l'aire commune $\mathcal{A}_{com}$ aux deux disques $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, en fonction de R et de α.

IV-B-6- A l'aide des questions **IV-A-1-** et **IV-A-2-**, montrer que $\mathcal{C}'$ partage le disque $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire si et seulement si α vérifie :

$$2\alpha\cos(2\alpha) - \sin(2\alpha) + \frac{\pi}{2} = 0.$$

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-A-1-	$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\qquad$ $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
IV-A-2-	$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ car : Comme $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ et d'après la question **IV-A-1-**, on a : $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$.
IV-B-1-	$AB = 2R\cos\alpha$ car : Soit A' le point du cercle $\mathcal{C}$, diamétralement opposé à A. Le triangle ABA' est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ et $[AA']$ est un diamètre de $\mathcal{C}$ donc le triangle ABA' est rectangle en B. On a alors : $\cos\alpha = \dfrac{AB}{AA'} = \dfrac{AB}{2R}$ donc $AB = 2R\cos\alpha$.
IV-B-2-a-	$mes(\widehat{AOB}) = \pi - 2\alpha$
IV-B-2-b-	Aire du secteur $\widehat{AOB} = \left(\dfrac{\pi - 2\alpha}{2}\right) R^2$
IV-B-3-a-	Aire du triangle $OAB = R^2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{R^2\sin(2\alpha)}{2}$
IV-B-3-b-	$\mathcal{A}_{partie\ grisée} = R^2\left(\dfrac{\pi - 2\alpha - \sin(2\alpha)}{2}\right)$
IV-B-4-	Aire du secteur $\widehat{BAB'} = \alpha\, AB^2 = 4R^2\alpha\cos^2\alpha$
IV-B-5-	$\mathcal{A}_{com} = R^2\left[\pi - 2\alpha - \sin(2\alpha) + 4\alpha\cos^2\alpha\right]$
IV-B-6-	$2\alpha\cos(2\alpha) - \sin(2\alpha) + \dfrac{\pi}{2} = 0$ car : $\mathcal{A}_{com} = \dfrac{1}{2}$ Aire de $\mathcal{D}$ $\iff R^2\left[\pi - 2\alpha - \sin(2\alpha) + 4\alpha\cos^2\alpha\right] = \dfrac{\pi}{2}\times R^2$ $\iff 4\alpha\cos^2\alpha - 2\alpha - \sin(2\alpha) + \dfrac{\pi}{2} = 0$ $\iff 2\alpha\left(2\cos^2\alpha - 1\right) - \sin(2\alpha) + \dfrac{\pi}{2} = 0$ $\iff 2\alpha\cos(2\alpha) - \sin(2\alpha) + \dfrac{\pi}{2} = 0$

EXERCICE IV - (suite)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 11

La partie C peut être traitée indépendamment du reste de l'exercice.

Partie C

On considère la fonction g définie sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$g(x) = 2\,x\,\cos(2\,x) - \sin(2\,x) + \frac{\pi}{2}$$

IV-C-1- Déterminer $g'(x)$.

IV-C-2- Résoudre dans $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $g'(x) = 0$.

IV-C-3-a- Etudier le signe de $g'(x)$ sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$. Justifier la réponse.

IV-C-3-b- Dresser le tableau de variation de g sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$. On précisera $g(0)$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

IV-C-4- En déduire l'existence d'un unique réel α_0 de $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ solution de $g(x) = 0$.

IV-C-5- Déterminer un encadrement de α_0 d'amplitude 10^{-2}.

Partie D

Soit un disque $\mathcal{D}$ de rayon $R = 3$ cm, délimité par un cercle $\mathcal{C}$.

Soit A un point de $\mathcal{C}$.

On considère le cercle $\mathcal{C}'$ de centre A et de rayon r qui partage le disque $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire.

IV-D-1-a- Donner la valeur exacte de r.

IV-D-1-b- Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de r.

IV-D-2- Tracer le cercle $\mathcal{C}'$.

REPONSES A L'EXERCICE IV (suite)

IV-C-1- $g'(x) = 2\cos(2x) - 4x\sin(2x) - 2\cos(2x) = -4x\sin(2x)$

IV-C-2- Résolution de $g'(x) = 0$

$g'(x) = 0 \iff -4x\sin(2x) = 0 \iff x = 0$ ou $\sin(2x) = 0$

Donc $g'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \dfrac{\pi}{2}$

IV-C-3-a- Etude du signe de $g'(x)$:

Pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $-4x \leq 0$ et $2x \in [0;\pi]$ donc $\sin(2x) \geq 0$.

D'où pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $g'(x) \leq 0$.

IV-C-3-b-

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$
$g'(x)$	0	$-$	0
$g(x)$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\dfrac{\pi}{2}$

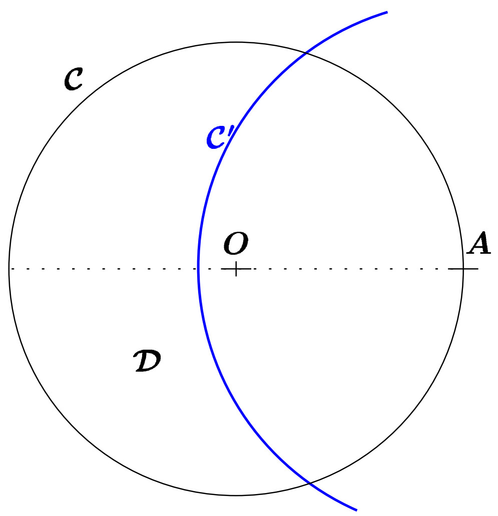
IV-C-4- $g(x) = 0$ admet une unique solution α_0 car : g est continue et strictement décroissante de $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Comme $0 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, il existe un unique réel α_0 dans $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $g(\alpha_0) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires).

IV-C-5- $0,95 < \alpha_0 < 0,96$

IV-D-1-a- $r = 2R\cos\alpha_0 = 6\cos\alpha_0$

IV-D-1-b- $r \simeq 6\cos(0,95) \simeq 3,5$

IV-D-2-



EXERCICE V - (12 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 13

On se place dans le plan complexe rapporté à un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé.

On dit qu'une fonction f définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est **involutive** si, pour tout complexe z de $\mathbb{C}$, on a :

$$(f \circ f)(z) = z$$

où $f \circ f$ désigne la fonction composée de f avec f.

Dans tout cet exercice, si z désigne un complexe, on notera $\bar{z}$ son complexe conjugué.

Partie A

Soient A et B deux nombres réels.

On considère la fonction F définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par : $F(z) = Az + B\bar{z}$.

V-A-1- Calculer $F(1)$ et $F(i)$.

V-A-2- Supposons que, pour tout complexe z, on a : $F(z) = 0$.
Montrer que l'on a alors : $A = B = 0$.

V-A-3- Déterminer A et B pour que, pour tout complexe z, on ait : $F(z) = z$.

Partie B

Soient a et b deux nombres réels.

On considère la fonction $f_{a,b}$ définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par : $f_{a,b}(z) = az + b\bar{z}$.

V-B-1- Exprimer, pour tout complexe z, $(f_{a,b} \circ f_{a,b})(z)$.

V-B-2- La fonction $f_{a,b}$ est involutive si et seulement si a et b vérifient un système de deux équations. Donner ce système.

V-B-3- Déterminer toutes les fonctions $f_{a,b}$ involutives.

Partie C

On considère dans cette partie, la fonction g définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$g(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}\,\bar{z} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\,\bar{z}.$$

V-C-1- La fonction g est-elle involutive ? Justifier votre réponse.

Soit M un point quelconque du plan, d'affixe $z = x + i\,y$.

On considère le point M' d'affixe $z' = x' + i\,y'$ tel que : $z' = g(z)$.

V-C-2- Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

V-C-3-a- Donner le système des 2 équations que doivent vérifier x et y pour que $M' = M$.

V-C-3-b- On note Δ l'ensemble des points M du plan tels que $M' = M$.

Justifier que Δ est la droite d'équation : $y = (\sqrt{2} - 1)\,x$.

Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de cette droite.

V-C-4- Montrer que, pour tout point M du plan, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

V-C-5-a- Déterminer les coordonnées x_I et y_I du milieu I du segment $[MM']$.

V-C-5-b- Montrer que I appartient à Δ.

V-C-6- Par quelle transformation géométrique simple le point M' se déduit-il du point M ?

REPONSES A L'EXERCICE V

V-A-1-	$F(1) = A + B$ $\qquad F(i) = (A - B)\, i$
V-A-2-	$A = B = 0$ car : $\begin{cases} F(1) = 0 \\ F(i) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 0 \\ (A - B)\, i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$
V-A-3-	$A = 1$ $\qquad B = 0$
V-B-1-	$(f_{a,b} \circ f_{a,b})(z) = a\,(az + b\bar{z}) + b\,(a\bar{z} + bz) = (a^2 + b^2)\, z + 2\,a\,b\,\bar{z}$
V-B-2-	$f_{a,b}$ est involutive si et seulement si a et b vérifient $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 2\,a\,b\, = 0 \end{cases}$
V-B-3-	Les fonctions $f_{a,b}$ involutives sont : $f_{0,1} \ : z \to \bar{z}$, $\quad f_{0,-1} \ : z \to -\,\bar{z}$, $\quad f_{1,0} \ : z \to z$ $\quad$ et $\quad f_{-1,0} \ : z \to -\,z$.
V-C-1-	g est-elle involutive ? oui Justification : $g \circ g(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}\, \overline{\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\, \bar{z}\right)} = e^{i\frac{\pi}{4}}\, e^{-\,i\frac{\pi}{4}}\, z = \ z$
V-C-2-	$x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x + y)$ $\qquad y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x - y)$
V-C-3-a-	$M = M'$ si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x + y) = x \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x - y) = y \end{cases} \iff \begin{cases} (\sqrt{2} - 2)\, x + \sqrt{2}\, y = 0 \\ \sqrt{2}\, x - (\sqrt{2} + 2)\, y = 0 \end{cases}$
V-C-3-b-	$\Delta : y = (\sqrt{2} - 1)\, x$ car d'après la question **V-C-3-a-**, on a : $M = M' \iff \begin{cases} (1 - \sqrt{2})\, x + y = 0 \\ x - (1 + \sqrt{2})\, y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = (\sqrt{2} - 1)\, x \\ y = \dfrac{1}{1 + \sqrt{2}}\, x \end{cases}$ et $\quad \dfrac{1}{1 + \sqrt{2}} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{\left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right)} == \dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \sqrt{2} - 1$. $\vec{u}$ a pour coordonnées $\left(1\ ,\ \sqrt{2} - 1\right)$.
V-C-4-	Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$ car : $\overrightarrow{MM'}\,.\,\vec{u} = (x' - x) + (\sqrt{2} - 1)(y' - y)$ $= \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x + y) - x\right) + (\sqrt{2} - 1)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x - y) - y\right)$ $= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[(1 - \sqrt{2})\, x + y + (\sqrt{2} - 1)\, x - y\right] = 0$
V-C-5-a-	$x_I = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left((1 + \sqrt{2})\, x + y\right)$ $\qquad y_I = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(x + (\sqrt{2} - 1)\, y\right)$
V-C-5-b-	$I \in \Delta$ car : $(\sqrt{2} - 1)\, x_I = (\sqrt{2} - 1)\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left((1 + \sqrt{2})\, x + y\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(x + (\sqrt{2} - 1)\, y\right) = y_I$
V-C-6-	M' se déduit de M par la symétrie orthogonale par rapport à Δ.