Baccalauréat ES Polynésie 8 juin 2012

Exercice 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, **une seule des trois réponses proposées est exacte**. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - x\ln x.$$

1. $f(3\text{e})$ est égal à :
   - **a.** $6\text{e} - 3\text{e}\ln 3$
   - **b.** $3\text{e}(1 - \ln 3)$
   - **c.** $3\text{e}^2\ln(3\text{e})$
2. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est :
   - **a.** $S = \left\{0~;~\text{e}^2\right\}$
   - **b.** $S = \left\{\text{e}^2\right\}$
   - **c.** $S = \{\ln 2\}$
3. La limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à :
   - **a.** $+\infty$
   - **b.** 2
   - **c.** $-\infty$
4. Une primitive de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$ est la fonction F définie sur $]0~;~+\infty[$ par :
   - **a.** $F(x) = 1 - \ln x$
   - **b.** $F(x) = \dfrac{5}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x^2\ln x$
   - **c.** $F(x) = x^2 - x^2\ln x$

Exercice 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'Etat du Wyoming, aux Etats-Unis, accueille chaque année près de 3,5 millions de touristes, notamment venus visiter les parcs nationaux de Yellowstone et de Grand Teton.
92 % de ces touristes visitent le parc de Yellowstone ; parmi ceux-là, 60 % visitent aussi le parc du Grand Teton.
Enfin, 6% des touristes se rendant au Wyoming ne visitent aucun des deux parcs.

On interroge au hasard un touriste s'étant rendu au Wyoming ; on suppose que tous ces touristes ont la même probabilité d'être interrogés.
On note Y l'évènement : « le touriste a visité le parc de Yellowstone » ; $\overline{Y}$ désigne l'évènement contraire de Y.
On note G l'évènement : « le touriste a visité le parc du Grand Teton » ; $\overline{G}$ désigne l'évènement contraire de G.
On note $p(A)$ la probabilité d'un évènement A et, si B est un évènement de probabilité non nulle, $p_B(A)$ la probabilité d'un évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.
Si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-3} *près.*

1. Que vaut $p\left(\overline{Y} \cap \overline{G}\right)$ la probabilité de l'évènement « $\overline{Y}$ et $\overline{G}$ » ?
2. Construire un arbre pondéré décrivant la situation étudiée, en y indiquant les probabilités données par l'énoncé qui correspondent à certaines de ses branches.
3. Calculer $p_{\overline{Y}}\left(\overline{G}\right)$. Interpréter ce résultat par une phrase.
4. Montrer que $p(G) = 0,572$.
5. Un touriste a visité le parc du Grand Teton. Calculer la probabilité qu'il ait aussi visité le parc de Yellowstone (le résultat sera arrondi à 10^{-3} près).
6. Le billet d'entrée pour le parc de Yellowstone est de 10 dollars, celui pour le parc du Grand Teton est de 7 dollars.
   a. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de la somme, en dollars, dépensée pour la visite des parcs de Yellowstone et du Grand Teton par un touriste se rendant au Wyoming.

Somme en dollars	0			17
Probabilité				

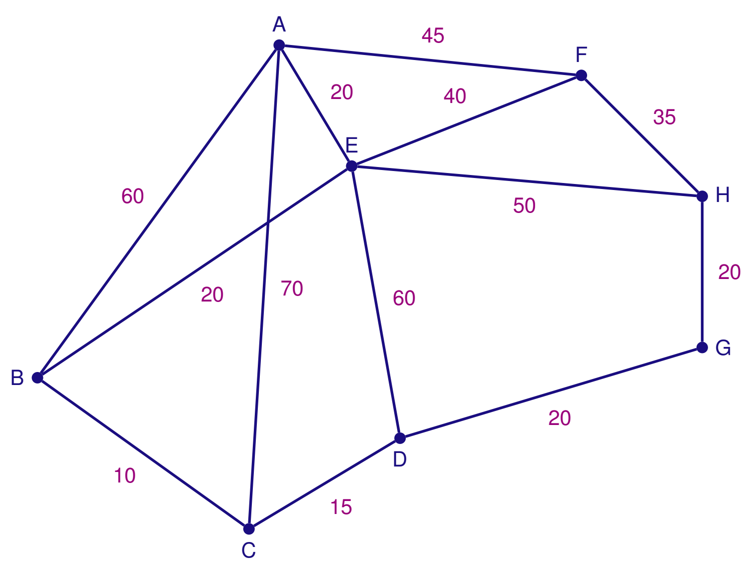
   b. Calculer l'espérance de cette loi et interpréter le résultat.

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Jonathan est un sportif adepte du semi-marathon (course à pied de 21,1 km). Depuis le 1$^{\text{er}}$ janvier 2012, il a décidé de courir un semi-marathon par mois. Afin d'améliorer sa préparation, il décide d'enchaîner les courses pédestres de 10 km dans différentes villes.

PARTIE A

Le graphe pondéré ci-dessous représente les villes A, B, C, D, E, F, H organisant des courses de 10 km et la ville G est celle organisant le prochain semi-marathon auquel Jonathan est inscrit.
Le poids de chaque arête représente le temps, en minutes, nécessaire pour relier une ville à une autre grâce aux transports en commun.



Jonathan vient de courir dans la ville A et souhaite se rendre dans la ville G pour repérer le parcours de son prochain semi-marathon. Déterminer à l'aide d'un algorithme le chemin permettant de relier le plus rapidement la ville A à la ville G et donner la durée de ce parcours en minutes.

PARTIE B

Grâce à son entraînement et à son expérience, Jonathan sait que :

— S'il a terminé la course lors de son précédent semi-marathon, il terminera le prochain semi-marathon avec une probabilité de 0,62 ;

— S'il a abandonné lors de son précédent semi-marathon, il terminera le prochain semi-marathon avec une probabilité de 0,8.

Jonathan a terminé son semi-marathon de janvier 2012. Pour tout entier naturel n, on note P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} r_n & t_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste du n-ième mois écoulé depuis janvier 2012, où r_n désigne la probabilité que Jonathan abandonne au semi-marathon du n-ième mois et t_n la probabilité que Jonathan termine le semi-marathon du n-ième mois.
L'état probabiliste initial, correspondant à janvier 2012, est donc donné par :
$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Traduire les données par un graphe probabiliste dont les sommets sont notés R et T (R lorsque Jonathan abandonne, T lorsqu'il termine le semi-marathon).
2. En déduire la matrice de transition en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. Calculer l'état probabiliste P_2. En déduire la probabilité que Jonathan ait abandonné lors du semi-marathon couru en mars 2012.
4. Soit P la matrice ligne $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ donnant l'état stable.
   a. Calculer les valeurs de x et de y arrondies à 10^{-3} près.
   b. Interpréter les résultats obtenus.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

Le tableau ci-dessous donne les quantités de super sans plomb livrées et vendues en France de 2001 à 2009 (les quantités sont exprimées en millions de tonnes).

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quantité (millions de tonnes) y_i	11,6	11,4	11,2	10,9	10,7	10,2	9,8	9,1	8,7

Source : INSEE

1. Représenter dans le plan muni d'un repère orthogonal le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$, avec $1 \leqslant i \leqslant 9$, associé à cette série statistique. On prendra pour unités graphiques :
   — sur l'axe des abscisses : 1 centimètre pour une année,
   — sur l'axe des ordonnées : 2 centimètres pour un million de tonnes, en commençant la graduation à 7 millions de tonnes.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Placer ce point sur le graphique.
3. **a.** Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés (aucune justification n'est demandée). Les coefficients de l'équation de la droite seront arrondis à 10^{-2} près.
   b. Tracer la droite d'ajustement obtenue.

4. En supposant que cet ajustement reste valable jusqu'en 2012, déterminer une estimation des quantités de Super Sans Plomb livrées et vendues pour l'année 2012.

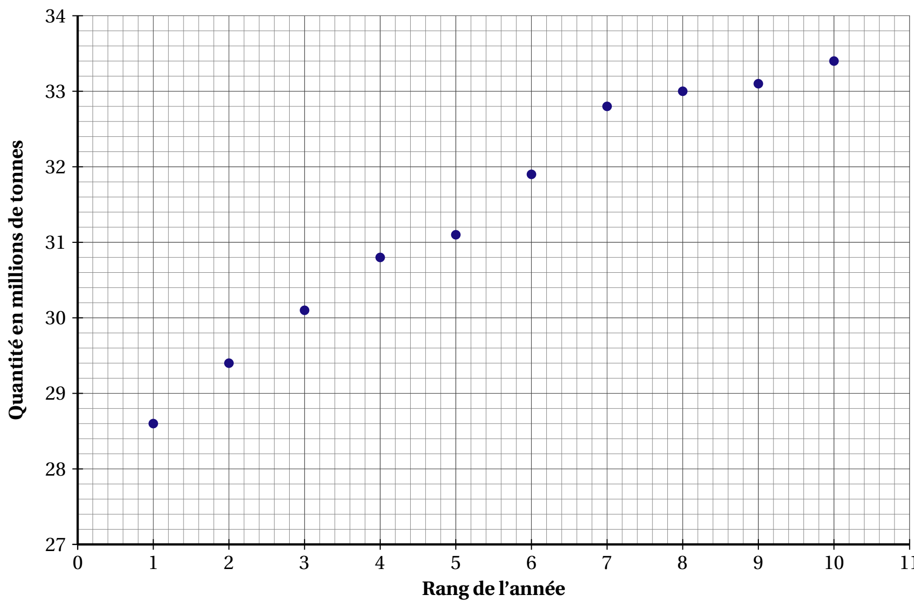
PARTIE B

Le tableau ci-dessous donne les quantités de gazole livrées et vendues en France de 2001 à 2010 (les quantités sont exprimées en millions de tonnes).

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quantité (millions de tonnes) y_i	28,6	29,4	30,1	30,8	31,1	31,9	32,8	33	33,1	33,4

Source : INSEE

Le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ avec i variant entre 1 et 10 est représenté ci-dessous.



1. L'allure de ce nuage de points permet d'envisager un ajustement logarithmique. On pose, pour tout i compris entre 1 et 10 : $z_i = \mathrm{e}^{\frac{y_i}{10}}$
Calculer les valeurs de z_3 et z_{10} (on arrondira à 10^{-2} près).

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_i = \mathrm{e}^{\frac{y_i}{10}}$	17,46	18,92		21,76	22,42	24,29	26,58	27,11	27,39	

2. On admet qu'une équation de la droite d'ajustement de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, est : $z = 1,25x + 16,56$.
En déduire une expression de y en fonction de x sous la forme $y = k\ln(cx+d)$ où k, c, d désignent trois réels à déterminer.
3. En utilisant ce modèle, déterminer à partir de quelle année la consommation de gazole devrait dépasser 35 millions de tonnes.

Exercice 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

PARTIE A

Soit d la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~4]$ par : $d(x) = \dfrac{3x+0,3}{\mathrm{e}^x} - 1,3$.
On note d' la fonction dérivée de la fonction d sur l'intervalle $[0~;~4]$.

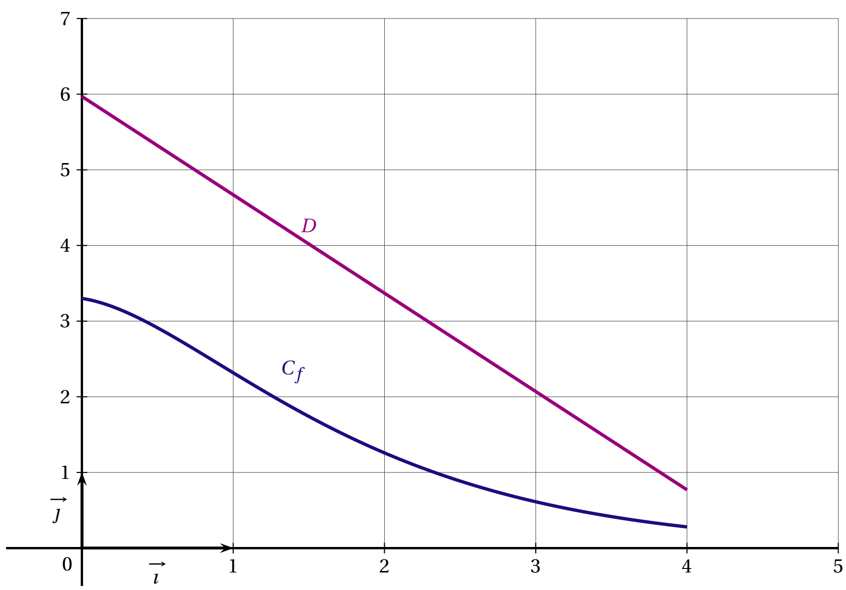
1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~4]$, $d'(x) = \dfrac{-3x+2,7}{\mathrm{e}^x}$
2. Étudier, pour x variant dans l'intervalle $[0~;~4]$, le signe de $d'(x)$, puis dresser le tableau de variations complet de la fonction d sur l'intervalle $[0~;~4]$. (on donnera dans ce tableau des valeurs arrondies à 10^{-2} près).
3. En déduire le signe de la fonction d sur l'intervalle $[0~;~4]$.

PARTIE B

Soient f et g les fonctions définies sur $[0~;~4]$ par

$$f(x) = \dfrac{3x+3,3}{\mathrm{e}^x} \quad \text{et} \quad g(x) = -1,3x+5,97.$$

On admet que les fonctions f et g sont décroissantes sur $[0~;~4]$; la fonction f est représentée ci-dessous par la courbe C_f et la fonction g par le segment de droite D.



1. Soit h la fonction définie sur $[0~;~4]$ par : $h(x) = g(x) - f(x)$.
   a. Montrer que pour tout $x \in [0~;~4]$, $h'(x) = d(x)$ (d désigne la fonction étudiée dans la partie A).
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction h sur $[0~;~4]$.
   c. Montrer que l'équation $h(x) = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0~;~4]$. En donner une valeur approchée à 10^{-1} près.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x$

PARTIE C

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Les résultats de la partie B *pourront être utilisés pour répondre aux questions suivantes.*

Une entreprise prévoit de fabriquer et de commercialiser mensuellement entre 1 et 4 tonnes d'un produit cosmétique (toute la production est vendue).
Pour x tonnes de produit fabriquées mensuellement (avec $x \in [0\,;\,4]$), on admet que $f(x)$ désigne le coût de production par tonne (en centaines de milliers d'euros), et $g(x)$ le prix de vente par tonne (en centaines de milliers d'euros).

1. L'entreprise décide de produire 1 tonne par mois. Déterminer, en arrondissant à l'euro près, le coût de production de la tonne produite, son prix de vente, et le bénéfice mensuel ainsi réalisé.
2. Déterminer, en euros, le prix de vente moyen par tonne pour une production comprise entre 1 et 4 tonnes.
3. L'entreprise souhaite réaliser un bénéfice par tonne d'au moins 100 000 euros. Quelles quantités doit-elle produire pour satisfaire cette contrainte ?