Baccalauréat S Antilles-Guyane 19 juin 2018

EXERCICE 1 **5 points**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants, soit à des entreprises. On admet que :

- parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur) ;
- 45,9 % des chênes et 80 % des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune ;
- les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.

Partie A

Parmi les arbres abattus, on en choisit un au hasard.
On considère les évènements suivants :

- C : « l'arbre abattu est un chêne » ;
- S : « l'arbre abattu est un sapin » ;
- E : « l'arbre abattu est un arbre d'essence secondaire » ;
- H : « l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ».

1. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune.
3. Justifier que la probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est égale à 0,587 7.
4. Quelle est la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.

Partie B

Le nombre d'arbres sur un hectare de cette forêt peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 4\,000$ et d'écart-type $\sigma = 300$.

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait entre 3 400 et 4 600 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait plus de 4 500 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.

Partie C

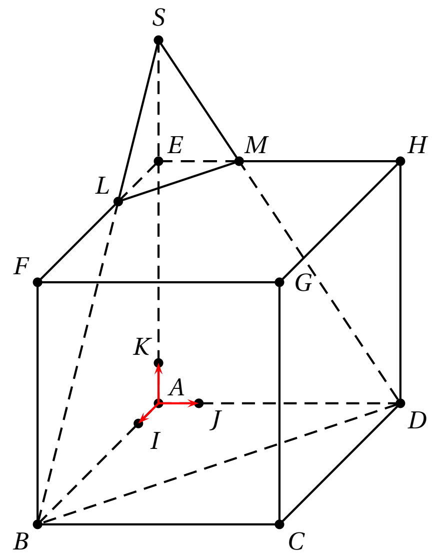
L'exploitant affirme que la densité de sapins dans cette forêt communale est de 1 sapin pour 2 arbres.

Sur une parcelle, on a compté 106 sapins dans un échantillon de 200 arbres. Ce résultat remet-il en cause l'affirmation de l'exploitant ?

EXERCICE 2 **5 points**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.
Ces deux solides sont représentés par le cube $ABCDEFGH$ et par le tétraèdre $SELM$ ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AI},\ \overrightarrow{AJ},\ \overrightarrow{AK}\right)$ tel que : $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.
Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

2. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2\,;\,0\,;\,6)$.

3. **a.** Donner une représentation paramétrique de la droite (BL).

b. Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0\,;\,0\,;\,9)$.

4. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;\,3\,;\,2)$.

a. Vérifier que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (BDL).

b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est :

$$3x+3y+2z-18=0.$$

c. On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0\\ y &=& s \quad (s\in\mathbb{R})\\ z &=& 6\end{array}\right.$$

Calculer les coordonnées du point M.

5. Calculer le volume du tétraèdre $SELM$. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

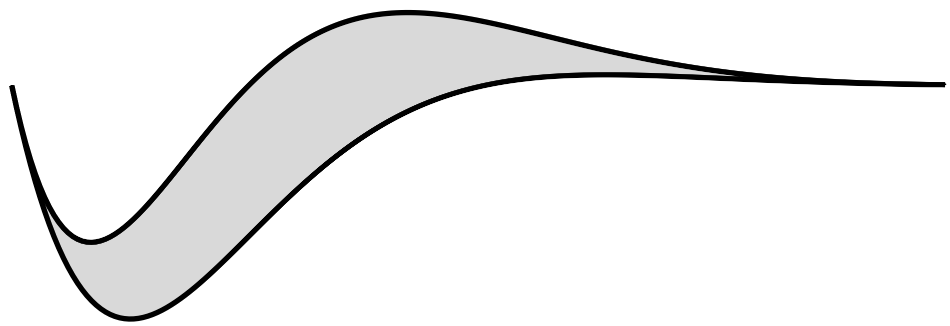
$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}.$$

6. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55°et 60°.
Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

EXERCICE 3 **5 POINTS**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A — Étude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}.$$
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f.
4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.
   a. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.
   b. En déduire les variations de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.

Partie B — Aire du logo

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en ANNEXE.

1. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$
   On admet que H est une primitive de la fonction $x \longmapsto (\sin x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
   On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.
   a. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.
   b. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm².

EXERCICE 4 **5 POINTS**

CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

   Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?
4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$.

   b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

   c. Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que ...
    n ← ...
    u ← ...
Fin de Tant que
```

   La notation « ← » correspond à une affectation de valeur, ainsi « $n \leftarrow 0$ » signifie « Affecter à n la valeur 0 ».
7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

EXERCICE 4 **5 POINTS**

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle. Il existe deux types de cartes :

- une carte de pêche dite « libre » (le pêcheur n'est pas limité en nombre de poissons pêchés) ;
- une carte de pêche dite « avec quota » (le pêcheur ne doit pas dépasser une certaine quantité hebdomadaire de poisson).

On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année.
On note, pour l'année $2017+n$:

- ℓ_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche libre ;
- q_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche avec quota.

On observe que :

- chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libres achètent de nouveau une carte de pêche libre l'année suivante ;
- Chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche avec quota achètent une carte de pêche libre l'année suivante ;
- En 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche libre. On a donc $\ell_0 = 0{,}4$ et $q_0 = 0{,}6$.

On note, pour tout entier naturel n, $P_n = \begin{pmatrix}\ell_n\\ q_n\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = MP_n$, où M est la matrice carrée $\begin{pmatrix}0{,}65 & 0{,}45\\ 0{,}35 & 0{,}55\end{pmatrix}$.

2. Calculer la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019.

3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1 ○	$M := \{\{0{,}65, 0{,}45\}, \{0{,}35, 0{,}55\}\}$ $\checkmark\ M := \begin{pmatrix}0,65 & 0,45\\ 0,35 & 0,55\end{pmatrix}$
2 ○	$P_0 := \{\{0,4\}, \{0,6\}\}$ $\checkmark\ P_0 := \begin{pmatrix}0,4\\ 0,6\end{pmatrix}$
3 ○	$Q := \{\{9,1\}, \{7,\text{-}\ 1\}\}$ $\checkmark\ Q := \begin{pmatrix}9 & 1\\ 7 & -1\end{pmatrix}$
4 ○	$T := \{\{1/16, 1/16\}, \{7/16, -9/16\}\}$ $\checkmark\ T := \begin{pmatrix}\frac{1}{16} & \frac{1}{16}\\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16}\end{pmatrix}$

5 ○	TQ $\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
6 ○	QT $\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
7 ○	$D := TMQ$ $\rightarrow\ D := \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$

En vous appuyant sur les résultats précédents, répondre aux deux questions suivantes :

a. Justifier que Q est une matrice inversible et préciser sa matrice inverse.
On notera Q^{-1} la matrice inverse de Q.

b. Justifier que $M = QDQ^{-1}$ et démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$M^n = QD^nQ^{-1}.$$

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul,

$$M^n = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}9+7\times 0{,}2^n & 9-9\times 0{,}2^n\\ 7-7\times 0{,}2^n & 7+9\times 0{,}2^n\end{pmatrix}.$$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $P_n = M^nP_0$.

b. Justifier que, pour tout entier naturel n :

$$\ell_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80}\times 0{,}2^n.$$

5. La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre dépassera-t-elle 60 % ?

Exercice 3