## Corrigé de l'exercice 1

**▶1.** On considère la fonction $h$ définie sur $I = [-1\ ;\ 10]$ par $h(t) = \dfrac{t+6}{-2t-5}$.

**a)** Justifier que $h$ est définie et dérivable sur $I$. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-2t-5=0$.

$$\begin{aligned} -2t-5 &= 0 \\ -2t &= 5 \\ t &= \frac{5}{-2} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{5}{2}$ n'est pas dans l'intervalle $[-1\ ;\ 10]$ et comme $h$ est un quotient de polynômes, alors $h$ est définie et dérivable sur $I$.

**b)** Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in [-1\ ;\ 10]$.

$$h'(t) = \frac{11 \times (-2t-5) - (t+6) \times (-2)}{(-2t-5)^2} = \frac{7}{(-2t-5)^2}$$

**c)** En déduire le sens de variations de $h$ sur $I$.
Comme $(-2t-5)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $7 > 0$ donc pour tout $t$ de $I$, $h'(t) > 0$.

| $t$ | $-1$ | | $10$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | |
| $h(x)$ | $-\frac{5}{3}$ | $\nearrow$ | $-\frac{16}{25}$ |

**▶2.** Étudier le sens de variations de $h$ définie par $h(x) = x^3 + 15x^2 + 63x - 7$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$h'(x) = 3x^2 + 30x + 63$
Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 30^2 - 4 \times 3 \times 63 = 144$ et $\sqrt{144} = 12$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-30-\sqrt{144}}{2\times 3} &= \frac{-30-\sqrt{144}}{6} \\ &= \frac{-30-12}{6} \\ &= \frac{-42}{6} \\ &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-30+\sqrt{144}}{2\times 3} &= \frac{-30+\sqrt{144}}{6} \\ &= \frac{-30+12}{6} \\ &= \frac{-18}{6} \\ &= -3 \end{aligned}$$

Les racines de $h'$ sont $x_1 = -7$ et $x_2 = -3$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

| $x$ | $-10$ | | $-7$ | | $-3$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On obtient ainsi le tableau de variation de $h$.

| $x$ | $-10$ | | $-7$ | | $-3$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $-137$ | $\nearrow$ | $-56$ | $\searrow$ | $-88$ | $\nearrow$ | $3\,123$ |

## Corrigé de l'exercice 2

►**1.** On considère la fonction $h$ définie sur $I = [0\ ;\ 10]$ par $h(t) = \dfrac{2t-4}{-4t-5}$.

**a)** Justifier que $h$ est définie et dérivable sur $I$. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-4t-5=0$.

$$\begin{aligned} -4t-5 &= 0 \\ -4t &= 5 \\ t &= \frac{5}{-4} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{5}{4}$ n'est pas dans l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ et comme $h$ est un quotient de polynômes, alors $h$ est définie et dérivable sur $I$.

**b)** Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in [0\ ;\ 10]$.

$$h'(t) = \frac{2\times(-4t-5)-(2t-4)\times(-4)}{(-4t-5)^2} = \frac{-26}{(-4t-5)^2}$$

**c)** En déduire le sens de variations de $h$ sur $I$.
Comme $(-4t-5)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-26<0$ donc pour tout $t$ de $I$, $h'(t)<0$. Ainsi, on obtient

| $t$ | $0$ | | $10$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | |
| $h(x)$ | $\frac{4}{5}$ | $\searrow$ | $-\frac{16}{45}$ |

►**2.** Étudier le sens de variations de $p$ définie par $p(x) = 3x^3 - \dfrac{45}{2}x^2 - 126x - 6$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$p'(x) = 9x^2 - 45x - 126$
Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-45)^2 - 4\times 9\times(-126) = 6\,561$ et $\sqrt{6\,561} = 81$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-45)-\sqrt{6\,561}}{2\times 9} &= \frac{45-\sqrt{6\,561}}{18} \\ &= \frac{45-81}{18} \\ &= \frac{-36}{18} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-(-45)+\sqrt{6\,561}}{2\times 9} &= \frac{45+\sqrt{6\,561}}{18} \\ &= \frac{45+81}{18} \\ &= \frac{126}{18} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Les racines de $p'$ sont $x_1 = -2$ et $x_2 = 7$.

Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

| $x$ | $-10$ | | $-2$ | | $7$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On obtient ainsi le tableau de variation de $p$.

| $x$ | $-10$ | | $-2$ | | $7$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $p(x)$ | $-3\,996$ | $\nearrow$ | $132$ | $\searrow$ | $-\dfrac{1\,923}{2}$ | $\nearrow$ | $-516$ |

## Corrigé de l'exercice 3

▶**1.** On considère la fonction $h$ définie sur $I = [-3\ ;\ 10]$ par $h(x) = \dfrac{-2x+6}{-2x-8}$.

**a)** Justifier que $h$ est définie et dérivable sur $I$. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-2x - 8 = 0$.

$$\begin{aligned} -2x - 8 &= 0 \\ -2x &= 8 \\ x &= \frac{8}{-2} \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Or $-4$ n'est pas dans l'intervalle $[-3\ ;\ 10]$ et comme $h$ est un quotient de polynômes, alors $h$ est définie et dérivable sur $I$.

**b)** Déterminer $h'(x)$ pour tout $x \in [-3\ ;\ 10]$.

$$h'(x) = \frac{(-2) \times (-2x-8) - (-2x+6) \times (-2)}{(-2x-8)^2} = \frac{28}{(-2x-8)^2}$$

**c)** En déduire le sens de variations de $h$ sur $I$.
Comme $(-2x-8)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $28 > 0$ donc pour tout $x$ de $I$, $h'(x) > 0$.

| $x$ | $-3$ | | $10$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | |
| $h(x)$ | $-6$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{2}$ |

▶**2.** Étudier le sens de variations de $q$ définie par $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 5$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$q'(x) = 6x^2 + 6x - 36$
Je dois étudier le signe de $q'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-36) = 900$ et $\sqrt{900} = 30$.

Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-6-\sqrt{900}}{2\times 6} &= \frac{-6-\sqrt{900}}{12}\\ &= \frac{-6-30}{12}\\ &= \frac{-36}{12}\\ &= -3\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}\frac{-6+\sqrt{900}}{2\times 6} &= \frac{-6+\sqrt{900}}{12}\\ &= \frac{-6+30}{12}\\ &= \frac{24}{12}\\ &= 2\end{aligned}$$

Les racines de $q'$ sont $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

| $x$ | $-10$ | | $-3$ | | $2$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On obtient ainsi le tableau de variation de $q$.

| $x$ | $-10$ | | $-3$ | | $2$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $q(x)$ | $-1\,345$ | $\nearrow$ | $76$ | $\searrow$ | $-49$ | $\nearrow$ | $1\,935$ |

## Corrigé de l'exercice 4

▶**1.** On considère la fonction $g$ définie sur $I = [-1\ ;\ 10]$ par $g(t) = \dfrac{-5t+5}{3t+5}$.

**a)** Justifier que $g$ est définie et dérivable sur $I$. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $3t + 5 = 0$.

$$\begin{aligned}3t+5 &= 0\\ 3t &= -5\\ t &= \frac{-5}{3}\end{aligned}$$

Or $-\dfrac{5}{3}$ n'est pas dans l'intervalle $[-1\ ;\ 10]$ et comme $g$ est un quotient de polynômes, alors $g$ est définie et dérivable sur $I$.

**b)** Déterminer $g'(t)$ pour tout $t \in [-1\ ;\ 10]$.

$$g'(t) = \frac{(-5)\times(3t+5) - (-5t+5)\times 3}{(3t+5)^2} = \frac{-40}{(3t+5)^2}$$

**c)** En déduire le sens de variations de $g$ sur $I$.
Comme $(3t+5)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-40 < 0$ donc pour tout $t$ de $I$, $g'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

| $t$ | $-1$ | | $10$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | $5$ | $\searrow$ | $-\dfrac{9}{7}$ |

**►2.** Étudier le sens de variations de $g$ définie par $g(x) = 2x^3 - 30x^2 + 144x - 4$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$g'(x) = 6x^2 - 60x + 144$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-60)^2 - 4 \times 6 \times 144 = 144$ et $\sqrt{144} = 12$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-60) - \sqrt{144}}{2 \times 6} &= \frac{60 - \sqrt{144}}{12} \\ &= \frac{60 - 12}{12} \\ &= \frac{48}{12} \\ &= 4\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{-(-60) + \sqrt{144}}{2 \times 6} &= \frac{60 + \sqrt{144}}{12} \\ &= \frac{60 + 12}{12} \\ &= \frac{72}{12} \\ &= 6\end{aligned}$$

Les racines de $g'$ sont $x_1 = 4$ et $x_2 = 6$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

| $x$ | $-10$ | | $4$ | | $6$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On obtient ainsi le tableau de variation de $g$.

| $x$ | $-10$ | | $4$ | | $6$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-6\,444$ | ↗ | $220$ | ↘ | $212$ | ↗ | $436$ |

## Corrigé de l'exercice 5

**►1.** On considère la fonction $g$ définie sur $I = [-10\ ;\ 0]$ par $g(t) = \dfrac{-2t + 7}{-3t + 3}$.

**a)** Justifier que $g$ est définie et dérivable sur $I$. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-3t + 3 = 0$.

$$\begin{aligned}-3t + 3 &= 0 \\ -3t &= -3 \\ t &= \frac{-3}{-3}\end{aligned}$$

Or 1 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 0]$ et comme $g$ est un quotient de polynômes, alors $g$ est définie et dérivable sur $I$.

**b)** Déterminer $g'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 0]$.

$$g'(t) = \frac{(-2) \times (-3t + 3) - (-2t + 7) \times (-3)}{(-3t + 3)^2} = \frac{15}{(-3t + 3)^2}$$

**c)** En déduire le sens de variations de $g$ sur $I$.
Comme $(-3t + 3)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $15 > 0$ donc pour tout $t$ de $I$, $g'(t) > 0$.

| $t$ | $-10$ | | $0$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $\dfrac{9}{11}$ | $\nearrow$ | $\dfrac{7}{3}$ |

**►2.** Étudier le sens de variations de $k$ définie par $k(x) = 3x^3 + 9x^2 - 135x + 10$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$k'(x) = 9x^2 + 18x - 135$

Je dois étudier le signe de $k'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = 18^2 - 4 \times 9 \times (-135) = 5\,184$ et $\sqrt{5\,184} = 72$.

Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-18-\sqrt{5\,184}}{2\times 9} &= \frac{-18-\sqrt{5\,184}}{18}\\ &= \frac{-18-72}{18}\\ &= \frac{-90}{18}\\ &= -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-18+\sqrt{5\,184}}{2\times 9} &= \frac{-18+\sqrt{5\,184}}{18}\\ &= \frac{-18+72}{18}\\ &= \frac{54}{18}\\ &= 3\end{aligned}$$

Les racines de $k'$ sont $x_1 = -5$ et $x_2 = 3$.

Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

| $x$ | $-10$ | | $-5$ | | $3$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On obtient ainsi le tableau de variation de $k$.

| $x$ | $-10$ | | $-5$ | | $3$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $k(x)$ | $-740$ | $\nearrow$ | $535$ | $\searrow$ | $-233$ | $\nearrow$ | $2\,560$ |